RING CORNER SEMI BOOLEAN

SKRIPSI

Sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar

Sarjana Matematika

oleh:
MEIKE VIONITA ULIL IL MAQNUN
145090407111023

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS BRAWIJAYA
MALANG
2018

LEMBAR PENGESAHAN

RING CORNER SEMI BOOLEAN

oleh:
MEIKE VIONITA ULIL IL MAQNUN
145090407111023

Setelah dipertahankan di depan Majelis Penguji
pada tanggal 20 Juli 2018
dan dinyatakan memenuhi syarat untuk memperoleh gelar
Sarjana Matematika

Pembimbing

Drs. Abdul Rouf Alghofari, M.Sc.,Ph.D
NIP. 196709071992031001

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika
FAkultas MIPA Universitas Brawijaya

Ratno Bagus Edy Wibowo, S.Si., M.Si., Ph.D
NIP. 197509082000031003

LEMBAR PERNYATAAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama : Meike Vionita Ulil Il Maqnun
NIM : 145090407111023
Jurusan : Matematika
Judul Skripsi : Ring Corner Semi Boolean

Dengan ini menyatakan bahwa:

1. **Isi dari skripsi yang saya buat adalah benar-benar karya sendiri dan tidak menjiplak karya orang lain, selain nama-nama yang termaktub di isi dan tertulis di daftar pustaka dalam skripsi ini.**
2. **Apabila dikemudian hari ternyata skripsi yang saya tulis terbukti hasil jiplakan, maka saya bersedia menanggung segala resiko yang akan saya terima.**

Demikian pernyataan ini dibuat dengan segala kesadaran.

Malang, 20 Juli 2018
Yang menyatakan,

Meike Vionita Ulil Il Maqnun
NIM. 145090407111023

RING CORNER SEMI BOOLEAN

ABSTRAK

Konsep ring mengalami banyak perkembangan. Salah satu jenis ring antara lain: ring Boolean, ring nil clean, dan ring corner. Banyak peneliti yang tertarik pada konsep ring Boolean, ring nil clean, dan ring corner, seperti menambahkan aksioma-aksioma sedemikian sehingga membentuk struktur baru yaitu ring strongly semi Boolean, ring weakly semi Boolean, ring strongly nil clean, ring weakly nil clean, dan ring corner semi Boolean. Ring semi Boolean disebut strongly jika perkalian antara radikal Jacobson dan elemen idempoten bersifat komutatif dan ring semi Boolean disebut weakly jika elemen dari ring R adalah jumlah atau selisih dari elemen radikal Jacobson dan elemen idempoten. Ring nil clean disebut strongly jika perkalian antara elemen nilpoten dan elemen idempoten bersifat komutatif dan ring nil clean disebut weakly jika elemen dari ring R adalah jumlah atau selisih dari elemen nilpoten dan elemen idempoten. Ring corner semi Boolean merupakan perluasan dari ring corner dan ring semi Boolean. Pada skripsi ini dibahas definisi ring semi Boolean, ring nil clean, dan ring corner serta sifat-sifat dari ring corner semi Boolean.

Kata Kunci: Ring Boolean, ring semi Boolean, ring clean, ring nil clean, ring corner.

SEMI BOOLEAN CORNER RING

ABSTRACT

Ring concept has many developments. One type of ring include: Boolean ring, nil clean ring, and corner ring. Many researchers are interested in the concept of Boolean rings, nil clean rings, and corners ring, such as adding axioms such that a new ring is strongly semi Boolean ring, weakly semi-Boolean ring, strongly nil clean ring, weakly nil clean ring, and semi Boolean corner ring. The semi-Boolean ring is called strongly if the multiplication between the Jacobson radical and the idempotent element is commutative and the semi-Boolean ring is called weakly if the element of the *R* ring is the sum or difference of the Jacobson's radical element and the idempotent element. Nil clean ring is called strongly if the multiplication between the nilpotent element and the idempotent element is commutative and the nil clean ring is called weakly if the element of the *R* ring is the sum or difference of the nilpotent element and the idempotent element. Semi Boolean corner ring is an extension of corner ring and semi Boolean ring. In this paper discussed the definition of semi-Boolean ring, nil clean ring, and the corner ring and the properties of semi Boolean corner ring.

Keywords: Boolean ring, semi Boolean ring, weakly semi Boolean ring, nil clean ring, weakly nil clean ring.

KATA PENGANTAR

Puji syukur kehadirat Allah SWT yang telah memberikan rahmat serta hidayah-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi yang berjudul **“RING CORNER SEMI BOOLEAN”** sebagai syarat untuk memperoleh gelar Sarjana Matematika.

Dalam penulisan skripsi ini penulis mendapat banyak bimbingan, motivasi, dan bantuan dari berbagai pihak. Oleh karena itu, penulis mengucapkan terima kasih kepada:

1. Drs. Abdul Rouf Alghofari, M.Sc.,Ph.D selaku dosen pembimbing skripsi yang tak pernah lelah memberikan bimbingan, nasehat, kritik, dan saran serta motivasinya.
2. Dr. Noor Hidayat, M.Si selaku dosen ketua majelis penguji skripsi atas segala kritik dan saran yang diberikan untuk perbaikan skripsi ini.
3. Dra. Ari Andari, M.Si selaku dosen majelis penguji skripsi dan selaku dosen penasehat akademik atas segala kritik, saran, dan motivasi untuk perbaikan skripsi ini.
4. Seluruh dosen Jurusan Matematika yang telah memberikan ilmunya kepada penulis serta segenap staf dan karyawan TU Jurusan Matematika atas segala bantuannya.
5. Ayah, ibu, adik, serta keluarga tercinta yang tak pernah lelah mendoakan, memberikan dukungan dan semangat serta kasih sayangnya kepada penulis.
6. Teman-teman keluarga besar Matematika 2014 atas semangat dan dukungannnya.
7. Semua pihak yang tidak dapat penulis sebutkan satu persatu.

Penulis menyadari bahwa dalam penulisan skripsi ini masih terdapat kekurangan. Oleh karena itu, penulis mengharap kritik dan saran yang bersifat membangun untuk perbaikan penulisan selanjutnya dan dapat disampaikan melalui email penulis meike_vionita@yahoo.com. Akhir kata, penulis berharap skripsi ini dapat bermanfaat bagi penulis khususnya dan pembaca umumnya.

Malang, 20 Juli 2018

Penulis

DAFTAR ISI

DAFTAR TABEL

DAFTAR SIMBOL

Simbol	**Keterangan**
$\in$	Elemen atau anggota
$\notin$	Bukan elemen atau bukan anggota
$\cong$	Isomorfik
$\subseteq$	Himpunan bagian
$\mathbb{N}$	Himpunan bilangan asli
$\mathbb{R}$	Himpunan bilangan real
$\mathbb{Z}$	Himpunan bilangan bulat
$\mathbb{Z}_{12}$	Himpunan bilangan bulat modulo 12
$\mathbb{Z}^{+}$	Himpunan bilangan bulat positif
$\bar{0}$	Bilangan modulo 0
a^{-1}	Invers dari a
$\mathcal{P}(\mathbb{Z})$	Himpunan kuasa
R/I	Ring faktor
$P(R)$	Perpotongan dari semua ideal prima dalam R
$J(R)$	Irisan semua ideal maksimal dalam ring R
$Id(R)$	Himpunan semua elemen idempotent di ring R
$Nil(R)$	Himpunan semua elemen nilpoten di ring R
$Nil^{*}(R)$	Jumlah semua elemen nilpoten ideal dua sisi di R
$Nil_{*}(R)$	Irisan dari semua ideal prima di R
$U(R)$	Himpunan semua elemen unit di ring R
aRa	Ring Corner

BAB I
PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Struktur aljabar adalah himpunan yang dilengkapi dengan suatu operasi yang memenuhi aksioma-aksioma tertentu. Banyak hal yang dapat dipelajari dari struktur aljabar antara lain grup, ring, koset, modul, dan lain-lain. Dalam skripsi ini akan dibahas struktur aljabar yang berkaitan dengan ring.

Ring adalah suatu himpunan tak kosong yang dilengkapi dua operasi biner, terhadap operasi penjumlahan grup komutatif, terhadap operasi pergandaan bersifat asosiatif, serta memenuhi hukum distributif. Salah satu jenis ring yang dibahas pada skripsi ini adalah ring Boolean, ring *clean*, dan ring *corner*.

Ring Boolean merupakan ring yang setiap elemennya jika dikuadratkan sama dengan elemen dari ring. Ring *clean* merupakan penjumlahan antara elemen unit dan elemen idempoten. Ring *corner* merupakan ring yang mengandung elemen idempoten. Salah satu bentuk dari ring Boolean adalah ring semi Boolean, sedangkan ring *clean* diperluas menjadi ring *nil clean*, dan ring *corner* diperluas menjadi *ring corner semi Boolean*.

Ring semi Boolean merupakan penjumlahan dari elemen idempoten dan irisan dari semua ideal maksimal dalam ring. Ring *nil clean* adalah penjumlahan antara elemen nilpoten dan elemen idempoten.

Pada tahun 2013, Diesl menulis tentang *Ring Nil Clean* dan sifat-sifat dari *ring nil clean*. Pada tahun 2016, Kosan, dkk menulis tentang *Nil clean* dan *Ring Strongly Nil clean* yang merupakan perluasan dari penelitian Diesl pada tahun 2013. Pada tahun 2017, Danchev dan Karamzadeh menulis tentang *Ring Corner Strongly nil-clean* yang merupakan perluasan dari penelitian Kosan, dkk pada tahun 2016. Pada paper yang berjudul *Ring Corner Strongly nil-clean* pada tahun 2017, Danchev dan Karamzadeh memperkenalkan hubungan antara *ring strongly nil clean* dengan *ring corner* dan dilanjutkan dengan paper yang berjudul *Semi Boolean Corner Ring* yang diperkenalkan pada tahun 2017b.

Pada skripsi ini diulas kembali tentang *ring semi Boolean* dan *ring nil clean*, serta sifat-sifat dari *ring corner semi Boolean*. Skripsi ini dirujuk dari hasil penelitian Danchev pada tahun 2017b dalam paper yang berjudul "*Semi-Boolean Corner Ring*".

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang yang telah dijelaskan, rumusan masalah yang dibahas pada skripsi ini adalah bagaimana sifat-sifat *ring corner semi Boolean.*

1.3 Tujuan

Berdasarkan rumusan masalah yang telah dijelaskan, tujuan skripsi ini adalah membahas sifat-sifat *ring corner semi Boolean*.

BAB II
DASAR TEORI

Pada bab ini diberikan beberapa definisi dan contoh yang menjadi dasar teori untuk menyelesaikan permasalahan pada bab III.

2.1 Pemetaan dan Operasi Biner

Berikut diberikan definisi serta contoh hasil kali kartesius, relasi, dan pemetaan yang dikutip dari Bhattacharya, dkk. (1986) dan operasi biner yang dikutip dari Andari (2015).

Definisi 2.1.1 (Hasil Kali Kartesius)
Misalkan A dan B masing-masing adalah himpunan tak kosong. Himpunan dari semua pasangan terurut (x, y), dimana $x \in A$ dan $y \in B$ disebut hasil kali kartesius dari A dan B. Dinotasikan $A \times B$ dan dapat ditulis sebagai berikut

$$A \times B = \{(x, y) | x \in A, y \in B\}$$

Contoh 2.1.2
Diberikan himpunan $A = \{1, 2\}$ dan $B = \{x, y, z\}$ maka

$$A \times B = \{(1, x), (1, y), (1, z), (2, x), (2, y), (2, z)\}$$

Definisi 2.1.3 (Himpunan Bagian)
Misalkan A dan B masing-masing adalah himpunan. Sebuah himpunan A disebut himpunan bagian (*subset*) dari himpunan B, dinotasikan $A \subseteq B$, jika dan hanya jika setiap elemen dalam A juga dalam B.

Contoh 2.1.4
Diberikan himpunan bilangan asli $\mathbb{N}$ dan himpunan bilangan bulat $\mathbb{Z}$. Untuk setiap elemen di dalam $\mathbb{N}$ juga merupakan elemen di dalam $\mathbb{Z}$, sehingga dapat disimpulkan bahwa $\mathbb{N}$ merupakan himpunan bagian dari $\mathbb{Z}$.

Definisi 2.1.5 (Relasi)
Misalkan A dan B masing-masing adalah himpunan tak kosong. R disebut relasi dari A ke B jika R adalah himpunan bagian dari $A \times B$.

Jika $(x, y) \in R$, maka x dikatakan berelasi dengan y yang dinotasikan dengan xRy.

Contoh 2.1.6
Diberikan himpunan $A = \{1, 2\}$ dan $B = \{x, y, z\}$. Akan dibuktikan bahwa $R = \{(1, x), (2, y)\}$ merupakan relasi dari A ke B.
Bukti.
Berdasarkan Contoh 2.1.2, diketahui bahwa hasil kali kartesiusnya adalah $A \times B = \{(1, x), (1, y), (1, z), (2, x), (2, y), (2, z)\}$, sehingga $R = \{(1, x), (2, y)\}$ merupakan himpunan bagian dari $A \times B$. Jadi, terbukti R merupakan relasi dari A ke B.

Definisi 2.1.7 (Pemetaan)
Misalkan A dan B masing-masing adalah himpunan tak kosong. Relasi f dari A ke B disebut pemetaan (fungsi) dari A ke B, jika untuk setiap elemen x di A terdapat tunggal elemen y di B sedemikian sehingga $f(x) = y$. Pemetaan f dari himpunan A ke B dinotasikan dengan

$$\begin{aligned} f: A &\to B \\ x &\mapsto f(x) = y. \end{aligned}$$

Dengan kata lain, f merupakan pemetaan jika $x_1 = x_2$ sedemikian sehingga berlaku $f(x_1) = f(x_2)$ untuk setiap $x_1, x_2 \in A$.

Contoh 2.1.8
Diberikan himpunan bilangan asli $\mathbb{N}$ dan relasi f dari $\mathbb{N}$ ke $\mathbb{N}$ dengan $f(x) = x^2$ untuk setiap $x \in \mathbb{N}$, maka f adalah suatu pemetaan.
Bukti.
Akan dibuktikan bahwa f adalah suatu pemetaan. Ambil sembarang $x_1, x_2 \in \mathbb{N}$ dengan $x_1 = x_2$ maka $x_1^2 = x_2^2$, sehingga $f(x_1) = f(x_2)$. Jelas bahwa untuk setiap $x \in \mathbb{N}$ terdapat tepat satu $f(x) \in \mathbb{N}$. Dengan demikian terbukti bahwa f adalah pemetaan.

Definisi 2.1.9 (Operasi Biner)
Suatu komposisi biner atau operasi tertutup dalam himpunan $S \neq \emptyset$ adalah

$$\begin{aligned} *: S \times S &\to S \\ (a, b) &\mapsto *\,(a, b) = a * b \end{aligned}$$

Contoh 2.1.10
Misalkan $\mathbb{Z}$ adalah himpunan bilangan bulat. Operasi di $\mathbb{Z}$ adalah penjumlahan. Akan dibuktikan bahwa operasi penjumlahan $(+)$ merupakan operasi biner.
Bukti.
Diketahui operasi pada $\mathbb{Z}$ adalah
$$+: \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$$
$$(x, y) \mapsto +(x, y) = x + y$$
Ambil sembarang $x, y \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ dengan $x = (a_1, b_1)$, $y = (a_2, b_2)$, sehingga diperoleh
$$\begin{aligned} x + y &= (a_1, b_1) + (a_2, b_2) \\ &= (a_1 + a_2, b_1 + b_2) \end{aligned}$$
$a_1, a_2 \in \mathbb{Z}$, sehingga dipenuhi $a_1 + a_2 \in \mathbb{Z}$ dan $b_1, b_2 \in \mathbb{Z}$, sehingga dipenuhi $b_1 + b_2 \in \mathbb{Z}$. Dengan demikian $x + y \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. Jadi, terbukti operasi penjumlahan pada bilangan bulat merupakan operasi biner.

Contoh 2.1.11
Misalkan $\mathbb{N}$ adalah himpunan bilangan asli. Operasi di $\mathbb{N}$ adalah $*$. Didefinisikan operasi $*$ adalah sebagai berikut.
$$*: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$$
$$(a, b) \mapsto * (a, b) = \frac{a^2 b}{2}$$
Akan dibuktikan bahwa operasi $*$ bukan merupakan operasi biner.
Bukti.
Akan dibuktikan bahwa $\mathbb{N}$ terhadap operasi $*$ bukan merupakan operasi biner. Ambil sembarang $a, b \in \mathbb{N}$, dengan $a = xk_1, b = yk_2$ dimana k_1, k_2 merupakan anggota bilangan ganjil.
$$\frac{a^2 b}{2} = \frac{(xk_1)^2 (yk_2)}{2} = \frac{x^2 k_1^2 y k_2}{2} = \frac{x^2 y k_1^2 k_2}{2} = \frac{(x^2 y)(k_1^2 k_2)}{2} \notin \mathbb{N},$$
sehingga operasi $*$ bukan operasi biner di $\mathbb{N}$.

2.2 Grup
Berikut diberikan definisi serta contoh semigrup, grup, grup komutatif, subgrup, subgrup sejati, subgrup tak sejati, dan koset yang dikutip dari Andari (2015).

Definisi 2.2.1 (Semigrup)
Suatu himpunan tak kosong S yang dilengkapi satu operasi biner $*$, yaitu $(S,*)$ disebut semigrup jika berlaku sifat:

i. Tertutup
ii. Assosiatif

Contoh 2.2.2
Diketahui himpunan $M_2(\mathbb{N}) = \left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : a, b, c, d \in \mathbb{N}\right\}$. Entri dari $M_2(\mathbb{N})$ adalah himpunan bilangan asli $\mathbb{N}$. Akan dibuktikan $(M_2(\mathbb{N}), +)$ merupakan semigrup tetapi bukan grup.
Bukti.
Akan dibuktikan bahwa $(M_2(\mathbb{N}), +)$ merupakan semigrup tetapi bukan grup. Ambil A, B, C elemen di $M_2(\mathbb{N})$. Misalkan

$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $\quad B = \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}$, $\quad C = \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}$

i. Tertutup

$$A + B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+e & b+f \\ c+g & d+h \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{N})$$

ii. Assosiatif

$$\begin{aligned}
(A + B) + C &= \left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}\right) + \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix} \\
&= \left(\begin{pmatrix} a+e & b+f \\ c+g & d+h \end{pmatrix}\right) + \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix} \\
&= \left(\begin{pmatrix} (a+e)+p & (b+f)+q \\ (c+g)+r & (d+h)+s \end{pmatrix}\right) \\
&= \left(\begin{pmatrix} a+(e+p) & b+(f+q) \\ c+(g+r) & d+(h+s) \end{pmatrix}\right) \\
&= \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \left(\begin{pmatrix} e+p & f+g \\ g+r & h+s \end{pmatrix}\right) \\
&= \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \left(\begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}\right) \\
&= A + (B + C)
\end{aligned}$$

Dari i. Dan ii. terbukti $M_2(\mathbb{N})$ merupakan semigrup. Kemudian, akan ditunjukkan $M_2(\mathbb{N})$ bukan grup.

iii. Elemen identitas dari $M_2(\mathbb{N})$ terhadap operasi penjumlahan adalah $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Tetapi, $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \notin M_2(\mathbb{N})$ karena entri dari $M_2(\mathbb{N})$ adalah himpunan bilangan asli $\mathbb{N}$.

Dari iii. terbukti $M_2(\mathbb{N})$ bukan merupakan grup.

Berdasarkan i, ii, dan iii, terbukti $M_2(\mathbb{N})$ semigrup tetapi bukan grup.

Definisi 2.2.3 (Grup)

Misalkan G adalah himpunan yang tidak kosong. $(G,*)$ disebut grup jika memenuhi aksioma:

1. Tertutup, yaitu untuk setiap $a, b \in G$ terdapat c sehingga berlaku $a * b = c$
2. Assosiatif, yaitu untuk setiap $a, b, c \in G$ berlaku
$$(a * b) * c = a * (b * c)$$
3. Mempunyai elemen satuan/elemen netral, yaitu terdapat $e \in G$,untuk setiap $a \in G$, sehingga berlaku
$$e * a = a * e = a$$
4. Setiap elemen mempunyai invers, yaitu untuk setiap $a \in G$, terdapat $a^{-1} \in G$, sehingga berlaku
$$a * (a^{-1}) = (a^{-1}) * a = e$$

Contoh 2.2.4

Diketahui $K = \{\overline{2}, \overline{4}, \overline{6}, \overline{8}\}$ terhadap $\mathbb{Z}_{10}$. Akan dibuktikan bahwa $(K,\cdot)$ merupakan grup.

Bukti.

Tabel 2.1 Operasi pergandaan pada K

$\cdot$	$\overline{2}$	$\overline{4}$	$\overline{6}$	$\overline{8}$
$\overline{2}$	$\overline{4}$	$\overline{8}$	$\overline{2}$	$\overline{6}$
$\overline{4}$	$\overline{8}$	$\overline{6}$	$\overline{4}$	$\overline{2}$
$\overline{6}$	$\overline{2}$	$\overline{4}$	$\overline{6}$	$\overline{8}$
$\overline{8}$	$\overline{6}$	$\overline{2}$	$\overline{8}$	$\overline{4}$

i. Tertutup.
Terlihat dari Tabel 2.1 bahwa untuk setiap $\bar{a}, \bar{b} \in \mathbb{Z}_{10}$ berlaku $\bar{a}\bar{b} \in \mathbb{Z}_{10}$.

ii. Assosiatif, yaitu untuk setiap $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c} \in \mathbb{Z}_{10}$ berlaku $(\bar{a}\,\bar{b})\bar{c} = \bar{a}(\bar{b}\bar{c})$. Ambil sembarang $\bar{a} = a + 10k_1$, $\bar{b} = b + 10k_2$, $\bar{c} = c + 10k_3 \in \mathbb{Z}_{10}$ dimana $a, b, c \in \mathbb{Z}$.

$$(\bar{a}\bar{b})\bar{c} = ((a+10k_1)(b+10k_2))(c+10k_3)$$
$$= (ab + 10ak_2 + 10bk_1 + 100k_1k_2)(c + 10k_3)$$
$$= abc + 10abk_3 + 10ack_2 + 100ak_2k_3 + 10bck_1 + 100bk_1k_3 + 100ck_1k_2 + 1000k_1k_2k_3$$
$$= abc + \bar{0} + \bar{0} + \bar{0} + \bar{0} + \bar{0} + \bar{0} + \bar{0}$$
$$= abc$$
$$\bar{a}(\bar{b}\bar{c}) = (a+10k_1)((b+10k_2)(c+10k_3))$$
$$= (a+10k_1)(bc + 10bk_3 + 10ck_2 + 100k_2k_3)$$
$$= abc + 10bck_1 + 10abk_3 + 100bk_1k_3 + 10ack_2 + 100ck_1k_2 + 100ak_2k_3 + 1000k_1k_2k_3$$
$$= abc + \bar{0} + \bar{0} + \bar{0} + \bar{0} + \bar{0} + \bar{0} + \bar{0}$$
$$= abc$$

iii. Elemen netral dari K adalah $e = \bar{6}$, karena berlaku

$e.a = a.e = a$	$e.a = a.e = a$
$\bar{6}.\bar{2} = \bar{2}.\bar{6} = \bar{2}$	$\bar{6}.\bar{6} = \bar{6}.\bar{6} = \bar{6}$
$\bar{6}.\bar{4} = \bar{4}.\bar{6} = \bar{4}$	$\bar{6}.\bar{8} = \bar{8}.\bar{6} = \bar{8}$

iv. Setiap elemen mempunyai invers.
Dari Tabel 2.1 dapat dilihat bahwa:

Invers dari $\bar{2}$ adalah $\bar{8}$	Invers dari $\bar{6}$ adalah $\bar{6}$
Invers dari $\bar{4}$ adalah $\bar{6}$	Invers dari $\bar{8}$ adalah $\bar{2}$

Jadi $(K,\cdot)$ merupakan grup.

Contoh 2.2.5
Misalkan Q^+ adalah himpunan bilangan rasional positif. Didefinisikan operasi $*$ pada Q^+ sebagai berikut.

$$a * b = \frac{a^2 b}{2}.$$

Akan dibuktikan bahwa $(Q^+,*)$ bukan merupakan grup.
Bukti.

i. Tertutup
ii. Assosiatif

$$(a*b)*c = \left(\frac{a^2b}{2}\right)*c = \frac{\left(\frac{a^2b}{2}\right)^2 * c}{2} = \frac{\frac{a^4b^2}{4} * c}{2} = \frac{a^4b^2c}{8}$$
$$a*(b*c) = a*\left(\frac{b^2c}{2}\right) = \frac{a^2 * \frac{b^2c}{2}}{2} = \frac{a^2b^2c}{4}$$
$$(a*b)*c \neq a*(b*c),$$

karena sifat assosiatif tidak terpenuhi, maka dapat disimpulkan bahwa $(Q^{+},*)$ bukan merupakan grup.

Definisi 2.2.6 (Grup Komutatif)
Misalkan $(G,*)$ adalah grup. $(G,*)$ disebut grup komutatif jika G memenuhi hukum komutatif, yaitu untuk setiap $a, b \in G$ berlaku

$$a * b = b * a.$$

Contoh 2.2.7
Diketahui $K = \{\bar{2}, \bar{4}, \bar{6}, \bar{8}\} \subseteq \mathbb{Z}_{10}$. Akan dibuktikan bahwa $(K,\cdot)$ merupakan grup komutatif.
Bukti.
Telah dibuktikan pada Contoh 2.2.2 bahwa $(K,\cdot)$ adalah suatu grup. Ambil $a = \bar{4}$ dan $b = \bar{6}$, maka berlaku

$$a.b = \bar{4}.\bar{6} = \bar{4}$$
$$b.a = \bar{6}.\bar{4} = \bar{4}$$

Jadi, terbukti bahwa untuk setiap $a, b \in K$ berlaku $a.b = b.a$, sehingga $(K,\cdot)$ adalah grup komutatif.

Definisi 2.2.8 (Subgrup, Subgrup Sejati, dan Subgrup Tak Sejati)
Misalkan G adalah grup. H adalah kompleks dalam G. H adalah himpunan tak kosong. H disebut subgrup dari G, jika terhadap hukum komposisi yang sama dengan G, H juga merupakan grup. Setiap grup G mempunyai dua subgroup tak sejati yaitu G dan $E = \{e\}$. Suatu subgroup H selain G dan E disebut subrup sejati.

Contoh 2.2.9
$(\mathbb{Z}_6, +)$ merupakan grup. Subgrup-subgrup dari $(\mathbb{Z}_6, +)$ adalah $\{\bar{0}\}, \{\bar{0}, \bar{3}\}, \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}\}, \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}\}$. Menurut Definisi 2.2.8 subgrup tak sejati dari $(\mathbb{Z}_6, +)$ adalah $\{\bar{0}\}$ dan $\{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}\}$. Sedangkan subgrup sejati dari $(\mathbb{Z}_6, +)$ adalah $\{\bar{0}, \bar{3}\}, \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}\}, \{\bar{0}, \bar{3}\}, \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}\}$.

Definisi 2.2.10 (Koset)
Misalkan G adalah grup, $a \in G$, $H = \{h_1, h_2, h_3, h_4, \dots\}$. Terhadap operasi pergandaan:

i. $aH = \{ah_1, ah_2, ah_3, ah_4, \dots\}$ disebut koset kiri relatif terhadap subgrup H.

ii. $Ha = \{h_1 a, h_2 a, h_3 a, h_4 a, \ldots\}$ disebut koset kanan relatif terhadap subgrup H.

Terhadap operasi penjumlahan:

i. $a + H = \{a + h_1, a+h_2, a+h_3, a+h_4, \ldots\}$ disebut koset kiri relatif terhadap subgrup H.

ii. $H + a = \{h_1 + a, h_2 + a, h_3 + a, h_4 + a, \ldots\}$ disebut koset kanan relatif terhadap subgrup H.

Contoh 2.2.11

Diberikan grup $(\mathbb{Z}_6, +)$. $I = \{\bar{0}, \bar{3}\}$ adalah subgrup dari $\mathbb{Z}_6$. Akan ditentukan banyak koset di $\mathbb{Z}_6$ relatif terhadap I.

Bukti.

Berdasarkan Definisi 2.2.10 diperoleh

$I + \bar{0} = \{\bar{0}, \bar{3}\}$

$I + \bar{1} = \{\bar{1}, \bar{4}\}$

$I + \bar{2} = \{\bar{2}, 5\}$

$I + \bar{3} = \{\bar{3}, \bar{0}\} = \{\bar{0}, \bar{3}\} = I$

$I + \bar{4} = \{\bar{4}, \bar{1}\} = \{\bar{1}, \bar{4}\} = I + 1$

$I + \bar{5} = \{\bar{5}, \bar{2}\} = \{\bar{2}, 5\} = I + 2$

Jadi banyak koset di $\mathbb{Z}_6$ ada tiga, yaitu $I, I + 1$, dan $I + 2$.

Contoh 2.2.12

Diketahui $H = \{1, -1, i, -i\}$ grup terhadap pergandaan. $K = \{1, -1\}$ merupakan subgrup dari H. Akan ditentukan banyak koset di H relatif terhadap K.

Bukti.

Berdasarkan Definisi 2.2.10 diperoleh

$K \cdot (1) = \{1, -1\}$

$K \cdot (-1) = \{1, -1\} = K$

$K \cdot (i) = \{i, -i\}$

$K \cdot (-i) = \{i, -i\} = K \cdot (i) = Ki$

Jadi banyak koset di H ada dua, yaitu K dan Ki.

2.3 Ring

Berikut diberikan definisi serta contoh yang berkaitan mengenai ring, ring komutatif, ring dengan elemen satuan yang dikutip dari Andari (2014), subring yang dikutip dari Bhattacharya, dkk. (1986), dan Boolean ring dikutip dari Jabbar dan Ahmed (2011).

Definisi 2.3.1 (Ring)
Suatu himpunan tak kosong R yang dilengkapi dua operasi biner misalkan terhadap penjumlahan dan pergandaan, disebut ring jika memenuhi:

i. $(R, +)$ merupakan grup komutatif
ii. $(R, \cdot)$ berlaku tertutup dan assosiatif
iii. Berlaku hukum distributif

Contoh 2.3.2
Akan dibuktikan bahwa $(\mathbb{Z}_5, +, \cdot)$ adalah ring.
Bukti.

Tabel 2.2 Operasi penjumlahan pada $\mathbb{Z}_5$

$+$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$
$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{0}$
$\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$
$\bar{3}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$
$\bar{4}$	$\bar{4}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$

Dari Tabel 2.2 akan ditunjukkan

I. $(\mathbb{Z}_5, +)$ merupakan grup komutatif.

   i. Berlaku sifat tertutup. Terlihat dari Tabel 2.2 bahwa untuk setiap $\bar{a}, \bar{b} \in \mathbb{Z}_5$ berlaku $\bar{a} + \bar{b} \in \mathbb{Z}_5$.

   ii. Berlaku sifat assosiatif, yaitu untuk setiap $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c} \in \mathbb{Z}_5$ berlaku $(\bar{a} + \bar{b}) + \bar{c} = \bar{a} + (\bar{b} + \bar{c})$.
   Ambil sembarang $\bar{a} = a + 5k_1$, $\bar{b} = b + 5k_2$, dan $\bar{c} = c + 5k_3 \in \mathbb{Z}_5$ dimana $a, b, c \in \mathbb{Z}$.

$$
\begin{aligned}
(\bar{a} + \bar{b}) + \bar{c} &= \big((a + 5k_1) + (b + 5k_2)\big) \\
&\quad + (c + 5k_3) \\
&= a + 5k_1 + b + 5k_2 + c + 5k_3 \\
&= a + 5k_1 + (b + 5k_2 + c + 5k_3) \\
&= a + \bar{0} + (b + \bar{0} + c + \bar{0}) \\
&= \bar{a} + (\bar{b} + \bar{c})
\end{aligned}
$$

   Jadi, $(\bar{a} + \bar{b}) + \bar{c} = \bar{a} + (\bar{b} + \bar{c})$.

iii. Mempunyai elemen netral yaitu terdapat $\bar{0} \in \mathbb{Z}_5$ untuk setiap $\bar{a} \in \mathbb{Z}_5$ sedemikian sehingga berlaku $\bar{0} + \bar{a} = \bar{a} + \bar{0} = \bar{a}$.

iv. Setiap elemen mempunyai invers.

Invers $\bar{0}$ adalah $\bar{0}$ Invers $\bar{3}$ adalah $\bar{2}$
Invers $\bar{1}$ adalah $\bar{4}$ Invers $\bar{4}$ adalah $\bar{1}$
Invers $\bar{2}$ adalah $\bar{3}$

v. Berlaku sifat komutatif. Untuk setiap $\bar{a}, \bar{b} \in \mathbb{Z}_5$ berlaku $\bar{a} + \bar{b} = \bar{b} + \bar{a}$. Ambil sembarang $\bar{a} = a + 5k_1,\ \bar{b} = b + 5k_2 \in \mathbb{Z}_5$ dimana $a, b \in \mathbb{Z}$.

$$\begin{aligned}
\bar{a} + \bar{b} &= (a + 5k_1) + (b + 5k_2) \\
&= ((a + b) + 5(k_1 + k_2)) \\
&= ((b + a) + 5(k_2 + k_1)) \\
&= (b + 5k_2) + (a + 5k_1) \\
&= \bar{b} + \bar{a}
\end{aligned}$$

Jadi $\bar{a} + \bar{b} = \bar{b} + \bar{a}$.

II. $(\mathbb{Z}_5, \cdot)$ merupakan semigrup.

Berdasarkan Tabel 2.2 akan ditunjukkan $(\mathbb{Z}_5, \cdot)$ adalah semigrup dengan memenuhi aksioma berikut.

i. Berlaku sifat tertutup. Terlihat dari Tabel 2.2 bahwa untuk setiap $\bar{a}, \bar{b} \in \mathbb{Z}_5$ berlaku $\bar{a} \cdot \bar{b} \in \mathbb{Z}_5$.

ii. Berlaku sifat assosiatif, yaitu untuk setiap $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c} \in \mathbb{Z}_5$ berlaku $(\bar{a}\,\bar{b})\bar{c} = \bar{a}(\bar{b}\,\bar{c})$. Ambil sembarang $\bar{a} = a + 5k_1,\ \bar{b} = b + 5k_2,\ \bar{c} = c + 5k_3 \in \mathbb{Z}_5$ dimana $a, b, c \in \mathbb{Z}$.

$$\begin{aligned}
(\bar{a}\,\bar{b})\bar{c} &= ((a + 5k_1)(b + 5k_2))(c + 5k_3) \\
&= (ab + 5ak_2 + 5bk_1 + 25k_1k_2)(c + 5k_3) \\
&= abc + 5abk_3 + 5ack_2 + 25ak_2k_3 + 5bck_1 \\
&\quad + 25bk_1k_3 + 25ck_1k_2 + 125k_1k_2k_3 \\
&= abc + \bar{0} + \bar{0} + \bar{0} + \bar{0} + \bar{0} + \bar{0} + \bar{0} \\
&= abc
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\bar{a}(\bar{b}\,\bar{c}) &= (a + 5k_1)((b + 5k_2)(c + 5k_3)) \\
&= (a + 5k_1)(bc + 5bk_3 + 5ck_2 + 25k_2k_3) \\
&= abc + 5bck_1 + 5abk_3 + 25bk_1k_3 + 5ack_2 \\
&\quad + 25ck_1k_2 + 25ak_2k_3 + 125k_1k_2k_3 \\
&= abc + \bar{0} + \bar{0} + \bar{0} + \bar{0} + \bar{0} + \bar{0} + \bar{0} \\
&= abc
\end{aligned}$$

III. Berlaku hukum distributif. Untuk setiap $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c} \in \mathbb{Z}_5$ berlaku $\bar{a}(\bar{b}+\bar{c}) = \bar{a}\bar{b} + \bar{a}\bar{c}$ dan $(\bar{a}+\bar{b})\bar{c} = \bar{a}\bar{c} + \bar{b}\bar{c}$.
Ambil sembarang $\bar{a} = a + 5k_1$, $\bar{b} = b + 5k_2$, $\bar{c} = c + 5k_3 \in \mathbb{Z}_5$ dimana $a, b, c \in \mathbb{Z}_5$.

$$\begin{aligned}\bar{a}(\bar{b}+\bar{c}) &= (a+5k_1)((b+5k_2)+(c+5k_3))\\ &= (a+5k_1)(b+5k_2+c+5k_3)\\ &= ab+5ak_2+ac+5ak_3+5bk_1+25k_1k_2\\ &\quad +5ck_1+25k_1k_3\\ &= (ab+5ak_2+5bk_1+25k_1k_2)+(ac+5ak_3\\ &\quad +5ck_1+25k_1k_3)\\ &= (a+5k_1)(b+5k_2)+(a+5k_1)(c+5k_3)\\ &= \bar{a}\,\bar{b}+\bar{a}\,\bar{c}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(\bar{a}+\bar{b})\bar{c} &= ((a+5k_1)+(b+5k_2))(c+5k_3)\\ &= (a+5k_1+b+5k_2)(c+5k_3)\\ &= ac+5ak_3+5ck_1+25k_1k_3+bc+5bk_3\\ &\quad +5ck_2+25k_2k_3\\ &= (ac+5ak_3+5ck_1+25k_1k_3)+(bc\\ &\quad +5bk_3+5ck_2+25k_2k_3)\\ &= (a+5k_1)(c+5k_3)+(b+5k_2)(c+5k_3)\\ &= \bar{a}\,\bar{c}+\bar{b}\,\bar{c}\end{aligned}$$

Jadi $\bar{a}(\bar{b}+\bar{c}) = \bar{a}\bar{b} + \bar{a}\bar{c}$ dan $(\bar{a}+\bar{b})\bar{c} = \bar{a}\bar{c} + \bar{b}\bar{c}$, sehingga dapat disimpulkan bahwa $(\mathbb{Z}_5, +, \cdot)$ merupakan ring.

Contoh 2.3.3
Misalkan R adalah himpunan pasangan bilangan bulat (a, b). Didefinisikan

$$(a,b)+(c,d) = (a+c, bd)$$
$$(a,b)(c,d) = (ac, bd)$$

Akan dibuktikan bahwa R bukan merupakan ring.
Bukti.

I. $(R, +)$ merupakan grup komutatif.

i. Berlaku sifat tertutup.

$$(a,b)+(c,d) = (a+c, bd)$$
$$(a,b)(c,d) = (ac, bd)$$

ii. Berlaku sifat assosiatif

$$\begin{aligned}((a,b)+(c,d))+(e,f) &= (a+c, bd)+(e,f)\\ &= (a+c+e, bdf)\end{aligned}$$

$$= (a,b) + (c+e, df)$$
$$= (a,b) + ((c,d) + (e,f))$$

iii. Mempunyai elemen netral

Misalkan elemen netralnya (c,d), maka

$$(a,b) + (c,d) = (a,b)$$
$$(a+c, bd) = (a,b)$$
$$a + c = a \qquad\qquad bd = b$$
$$c = a - a = 0 \qquad\qquad d = \frac{b}{b} = 1$$

Jadi, elemen netral $(c,d) = (0,1)$.

iv. Setiap elemen mempunyai invers.

Misalkan invers dari (a,b) adalah (c,d), sehingga berlaku

$$(a,b) + (c,d) = (0,1)$$
$$(a+c, bd) = (0,1)$$
$$a + c = 0 \rightarrow\ c = -a \qquad bd = 1 \rightarrow\ d = \frac{1}{b}$$
$$(c,d) = \left(-a, \frac{1}{b}\right) \notin R.$$

Salah satu syarat tidak dipenuhi, maka dapat disimpulkan bahwa R bukan grup terhadap operasi penjumlahan, sehingga juga bukan merupakan ring.

Contoh 2.3.4

Diketahui $\mathcal{P}(\mathbb{Z})$ adalah himpunan kuasa (*power set*) dari himpunan bilangan bulat $\mathbb{Z}$. Didefinisikan

$$A + B = (A \cup B) - (A \cap B)$$
$$AB = (A \cap B)$$

Untuk setiap $A, B \in \mathcal{P}(\mathbb{Z})$. Akan dibuktikan bahwa $\mathcal{P}(\mathbb{Z})$ adalah ring.

Bukti.

I. $(\mathcal{P}(\mathbb{Z}), +)$ merupakan grup komutatif.

i. Berlaku sifat tertutup.

Ambil sembarang $A, B \in P(\mathbb{Z})$, sehingga diperoleh

$$A + B = (A \cup B) - (A \cap B) \in P(\mathbb{Z})$$

ii. Berlaku sifat assosiatif

$$(A + B) + C = \big((A \cup B) - (A \cap B)\big) + C$$
$$= \big((A \cup B) - (A \cap B)\big) \cup C - \big((A \cup B) - (A \cap B)\big) \cap C$$
$$= (A \cup B \cup C) - (A \cap B \cup C) - (A \cup B \cap C) + (A \cap B \cap C)$$
$$= A \cup \big((B \cup C) - (B \cap C)\big) - A \cap ((B \cup C) - (B \cap C))$$

$$= A + \big((B \cup C) - (B \cap C)\big) = A + (B + C).$$

iii. Mempunyai elemen netral yaitu $\emptyset$, karena untuk setiap $A \in P(\mathbb{Z})$ terdapat $\emptyset \in P(\mathbb{Z})$ sedemikian sehingga berlaku

$$A + \emptyset = (A \cup \emptyset) - (A \cap \emptyset) = A$$
$$\emptyset + A = (\emptyset \cup A) - (\emptyset \cap A) = A$$

iv. Setiap elemen mempunyai invers, karena untuk setiap $A \in P(\mathbb{Z})$ terdapat $A \in P(\mathbb{Z})$ sedemikian sehingga berlaku

$$A + A = (A \cup A) - (A \cap A) = \emptyset$$

v. Berlaku sifat komutatif.

$$\begin{aligned} A + B &= (A \cup B) - (A \cap B) \\ &= (A \cup B) - (A \cap B) = B + A \end{aligned}$$

II. Terhadap operasi pergandaan

i. Berlaku sifat tertutup.

$$AB = (A \cap B)$$

ii. Berlaku sifat assosiatif

$$\begin{aligned} (AB)C &= (A \cap B) \cap C \\ &= A \cap B \cap C = A \cap (B \cap C) = A(BC) \end{aligned}$$

III. Berlaku hukum distributif.

$$\begin{aligned} A(B + C) &= A \cap \big((B \cup C) - (B \cap C)\big) \\ &= (A \cap (B \cup C)) - (A \cap (B \cap C)) \\ &= \big((A \cap B) \cup (A \cap C)\big) - ((A \cap B) \cap (A \cap C)) \\ &= (A \cap B) + (A \cap C) = AB + AC \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (A + B)C &= ((A \cup B) - (A \cap B)) \cap C \\ &= \big((A \cup B) \cap C\big) - ((A \cap B) \cap C) \\ &= \big((A \cap C) \cup (B \cap C)\big) - \big((A \cap C) \cap (B \cap C)\big) \\ &= (A \cap C) + (B \cap C) = AC + BC \end{aligned}$$

$(\mathcal{P}(\mathbb{Z}), +)$ merupakan grup komutatif, terhadap operasi pergandaan terbukti semigrup, dan berlaku hukum distributif. Jadi, terbukti bahwa $\mathcal{P}(\mathbb{Z})$ merupakan ring.

Definisi 2.3.5 (Ring Komutatif dan Ring dengan Elemen Satuan)

Misalkan $(R, +, \cdot)$ adalah suatu ring. $(R, +, \cdot)$ disebut ring komutatif jika R memenuhi hukum komutatif terhadap operasi pergandaan, yaitu untuk setiap a, b anggota R berlaku

$$ab = ba.$$

$(R, +, \cdot)$ disebut ring dengan elemen satuan, jika terdapat $e \in R$ untuk setiap a anggota R sedemikian sehingga

$$ae = ea = a$$

Contoh 2.3.6

Diberikan ring $(\mathbb{Z}_5, +, \cdot)$. Akan dibuktikan $(\mathbb{Z}_5, +, \cdot)$ adalah ring komutatif dengan elemen satuan.

Bukti.

Akan dibuktikan bahwa $(\mathbb{Z}_5, +, \cdot)$ adalah ring komutatif dengan elemen satuan.

i. Berlaku hukum komutatif terhadap pergandaan. Untuk setiap $a, b \in R$ berlaku $ab = ba$. Misalkan $a = \bar{0}, b = \bar{3}$ diperoleh $(\bar{0})(\bar{3}) = (\bar{3})(\bar{0}) = \bar{0}$. Jadi $ab = ba$. Dengan cara yang sama berlaku untuk setiap a, b anggota $\mathbb{Z}_5$, berlaku $ab = ba$.

ii. Memiliki elemen satuan terhadap pergandaan. Terdapat $e = \bar{1} \in Z_5$ untuk setiap a anggota $\mathbb{Z}_5$ sedemikian sehingga berlaku $(\bar{1})(a) = (a)(\bar{1}) = a$.

Jadi terbukti $(\mathbb{Z}_5, +, \cdot)$ ring komutatif dengan elemen satuan.

Definisi 2.3.7 (Subring)

Misalkan $(R, +, \cdot)$ adalah ring dan S adalah himpunan bagian tak kosong dari R, maka S disebut subring dari R jika $(S, +, \cdot)$ ring.

Contoh 2.3.8

Diberikan ring $\mathbb{Z}_8 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}, \bar{6}, \bar{7}\}$. Jika $S = \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}, \bar{6}\}$ adalah himpunan bagian dari $\mathbb{Z}_8$, maka $(S, +, \cdot)$ merupakan subring dari $(\mathbb{Z}_8, +, \cdot)$.

Bukti.

Akan dibuktikan bahwa himpunan $S = \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}, \bar{6}\}$ dengan operasi penjumlahan dan pergandaan adalah suatu ring.

I. Akan dibuktikan bahwa $(S, +)$ grup komutatif.

Tabel 2.3 Operasi penjumlahan pada S

$+$	$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{4}$	$\bar{6}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{4}$	$\bar{6}$
$\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{4}$	$\bar{6}$	$\bar{0}$
$\bar{4}$	$\bar{4}$	$\bar{6}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$
$\bar{6}$	$\bar{6}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{4}$

i. Berlaku sifat tertutup. Terlihat dari Tabel 2.3 bahwa untuk setiap $\bar{a}, \bar{b} \in S$ berlaku $\bar{a} + \bar{b} \in S$ dimana $S \subset \mathbb{Z}_8$.

ii. Berlaku sifat assosiatif, yaitu untuk setiap $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c} \in S$ berlaku $\left(\bar{a} + \bar{b}\right) + \bar{c} = \bar{a} + \left(\bar{b} + \bar{c}\right)$.
Ambil sembarang $\bar{a} = a + 8k_1$, $\bar{b} = b + 8k_2$, $\bar{c} = c + 8k_3 \in S$ dimana $S \subset \mathbb{Z}_8$ dan $a, b, c \in \mathbb{Z}$.

$$\begin{aligned}\left(\bar{a} + \bar{b}\right) + \bar{c} &= \left((a + 8k_1) + (b + 8k_2)\right) \\ &\quad +(c + 8k_3) \\ &= (a + 8k_1 + b + 8k_2) + (c + 8k_3) \\ &= a + 8k_1 + b + 8k_2 + c + 8k_3 \\ &= a + 8k_1 + (b + 8k_2 + c + 8k_3) \\ &= a + \bar{0} + (b + \bar{0} + c + \bar{0}) \\ &= \bar{a} + (\bar{b} + \bar{c})\end{aligned}$$

Jadi $\left(\bar{a} + \bar{b}\right) + \bar{c} = \bar{a} + \left(\bar{b} + \bar{c}\right)$.

iii. Mempunyai elemen netral, yaitu terdapat $\bar{0} \in S$ untuk setiap $\bar{a} \in S$ sedemikian sehingga berlaku
$$\bar{0} + \bar{a} = \bar{a} + \bar{0} = \bar{a}$$

iv. Setiap elemen mempunyai invers.
Invers $\bar{0}$ adalah $\bar{0}$ Invers $\bar{4}$ adalah $\bar{4}$
Invers $\bar{2}$ adalah $\bar{6}$ Invers $\bar{6}$ adalah $\bar{2}$

v. Berlaku sifat komutatif. Untuk setiap $\bar{a}, \bar{b} \in S$ berlaku $\bar{a} + \bar{b} = \bar{b} + \bar{a}$. Ambil sembarang $\bar{a} = a + 8k_1$, $\bar{b} = b + 8k_2 \in S$ dimana $S \subset \mathbb{Z}_8$ dan $a, b, c \in \mathbb{Z}$.

$$\begin{aligned}\bar{a} + \bar{b} &= (a + 8k_1) + (b + 8k_2) \\ &= (a + b) + 8(k_1 + k_2) \\ &= (b + a) + 8(k_2 + k_1) \\ &= (b + 8k_2) + (a + 8k_1) = \bar{b} + \bar{a}\end{aligned}$$

II. Akan dibuktikan bahwa $(S, \cdot)$ merupakan semigrup

i. Berlaku sifat tertutup. Terlihat dari Tabel 2.3 bahwa untuk setiap $\bar{a}, \bar{b} \in S$ berlaku $\bar{a}\,\bar{b} \in S$ dimana $S \subset \mathbb{Z}_8$.

ii. Berlaku sifat assosiatif, yaitu untuk setiap $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c} \in S$ berlaku $\left(\bar{a}\,\bar{b}\right)\bar{c} = \bar{a}(\bar{b}\,\bar{c})$. Ambil sembarang $\bar{a} = a + 8k_1$, $\bar{b} = b + 8k_2$, $\bar{c} = c + 8k_3 \in S$ dimana $S \subset \mathbb{Z}_8$ dan $a, b, c \in \mathbb{Z}$.

$$
\begin{aligned}
(\bar{a}\,\bar{b})\bar{c} &= ((a+8k_1)(b+8k_2))(c+8k_3)\\
&= (ab+8ak_2+8bk_1+64k_1k_2)(c+8k_3)\\
&= (abc+8abk_3+8ack_2+64ak_2k_3\\
&\quad +8bck_1+64bk_1k_3+64ck_1k_2\\
&\quad +512k_1k_2k_3)\\
&= abc+\bar{0}+\bar{0}+\bar{0}+\bar{0}+\bar{0}+\bar{0}+\bar{0}\\
&= abc\\
\bar{a}(\bar{b}\,\bar{c}) &= (a+8k_1)((b+8k_2)(c+8k_3))\\
&= (a+8k_1)(bc+8bk_3+8ck_2+64k_2k_3)\\
&= (abc+8bck_1+8abk_3+64bk_1k_3\\
&\quad +8ack_2+64ck_1k_2+64ak_2k_3\\
&\quad +512k_1k_2k_3)\\
&= abc+\bar{0}+\bar{0}+\bar{0}+\bar{0}+\bar{0}+\bar{0}+\bar{0}\\
&= abc
\end{aligned}
$$

III. Berlaku hukum distributif. Untuk setiap $\bar{a},\bar{b},\bar{c} \in S,\ S \subset \mathbb{Z}_8$ berlaku $\bar{a}(\bar{b}+\bar{c}) = \bar{a}\bar{b}+\bar{a}\bar{c}$ dan $(\bar{a}+\bar{b})\bar{c} = \bar{a}\bar{c}+\bar{b}\bar{c}$. Ambil sembarang $\bar{a} = a+8k_1,\ \bar{b} = b+8k_2,$ $\bar{c} = c+8k_3 \in \mathbb{Z}_5$ dimana $a,b,c \in \mathbb{Z}_5$.

$$
\begin{aligned}
\bar{a}(\bar{b}+\bar{c}) &= (a+8k_1)((b+8k_2)+(c+8k_3))\\
&= (a+8k_1)(b+8k_2+c+8k_3)\\
&= ab+8ak_2+ac+8ak_3+8bk_1+64k_1k_2\\
&\quad +8ck_1+64k_1k_3\\
&= (ab+8ak_2+8bk_1+64k_1k_2)+(ac+8ak_3\\
&\quad +8ck_1+64k_1k_3)\\
&= (a+8k_1)(b+8k_2)+(a+8k_1)(c+8k_3)\\
&= \bar{a}\,\bar{b}+\bar{a}\,\bar{c}\\
(\bar{a}+\bar{b})\bar{c} &= \big((a+8k_1)+(b+8k_2)\big)(c+8k_3)\\
&= (a+8k_1+b+8k_2)(c+8k_3)\\
&= ac+8ak_3+8ck_1+64k_1k_3+bc+8bk_3\\
&\quad +8ck_2+64k_2k_3\\
&= (ac+8ak_3+8ck_1+64k_1k_3)+(bc\\
&\quad +8bk_3+8ck_2+64k_2k_3)\\
&= (a+8k_1)(c+8k_3)+(b+8k_2)(c+8k_3)\\
&= \bar{a}\,\bar{c}+\bar{b}\,\bar{c}
\end{aligned}
$$

Jadi $\bar{a}(\bar{b}+\bar{c}) = \bar{a}\bar{b}+\bar{a}\bar{c}$ dan $(\bar{a}+\bar{b})\bar{c} = \bar{a}\bar{c}+\bar{b}\bar{c}$, sehingga dapat disimpulkan bahwa $(S,+,\cdot)$ merupakan ring.

Definisi 2.3.9 (Ring Boolean)
Misalkan R adalah ring. R disebut ring Boolean jika untuk setiap $r \in R$ berlaku $r^2 = r$.

Contoh 2.3.10
Diberikan ring $(\mathbb{Z}_2, +, \cdot)$. Akan dibuktikan $\mathbb{Z}_2$ adalah ring Boolean.
Bukti.
Elemen dari $\mathbb{Z}_2 = \{\bar{0}, \bar{1}\}$. Berdasarkan Definisi 2.3.9 diperoleh $\bar{0}^2 = \bar{0}$ dan $\bar{1}^2 = \bar{1}$, sehingga terbukti $\mathbb{Z}_2$ adalah ring Boolean.

Contoh 2.3.11
Diberikan $\mathcal{P}(\mathbb{Z})$ berdasarkan Contoh 2.3.4 adalah ring. Akan dibuktikan bahwa $\mathcal{P}(\mathbb{Z})$ adalah ring Boolean.
Bukti.
Akan dibuktikan $\mathcal{P}(\mathbb{Z})$ adalah ring Boolean. Untuk setiap $A \in \mathcal{P}(\mathbb{Z})$ berlaku $A \cdot A = A \cap A = A$. Berdasarkan Definisi 2.3.9 terbukti bahwa $\mathcal{P}(\mathbb{Z})$ adalah ring Boolean.

2.4 Elemen Khusus dalam Ring

Berikut diberikan definisi serta contoh elemen idempoten yang dikutip dari Jabbar dan Ahmed (2011), idempoten orthogonal yang dikutip dari Akbari, dkk. (2013), *ring weakly Boolean*, elemen nilpoten, UU ring, dan *ring exchange* yang dikutip dari Danchev (2017b), elemen unipoten yang dikutip dari Danchev dan Govern (2015), serta elemen unit yang dikutip dari Brungs dan Torner (1997).

Definisi 2.4.1 (Elemen Idempoten)
Misalkan R adalah ring dan $a \in R$. a disebut elemen idempoten pada R jika memenuhi $a^2 = a$. Himpunan semua elemen idempoten di R dinotasikan $Id(R)$.

Contoh 2.4.2
Misalkan $(\mathbb{Z}_4, +, \cdot)$ adalah ring. Akan ditentukan $Id(\mathbb{Z}_4)$.
Bukti.

Tabel 2.4 Hasil Kuadrat Elemen di $\mathbb{Z}_4$

a	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$
a^2	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$

Berdasarkan Tabel 2.4 diketahui elemen idempoten yang ada di $\mathbb{Z}_4$adalah $\bar{0}$ dan $\bar{1}$, karena $\bar{0}^2 = \bar{0}, \bar{1}^2 = \bar{1}$. Jadi $Id(\mathbb{Z}_4) = \{\bar{0}, \bar{1}\}$.

Contoh 2.4.3
Misalkan $(\mathbb{Z}_5, +,\cdot)$ adalah ring. Akan ditentukan $Id(\mathbb{Z}_5)$.
Bukti.

Tabel 2.5 Hasil Kuadrat Elemen di $\mathbb{Z}_5$

a	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$
a^2	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{4}$	$\bar{4}$	$\bar{1}$

Berdasarkan Tabel 2.5 diketahui elemen idempoten yang ada di $\mathbb{Z}_5$adalah $\bar{0}$ dan $\bar{1}$, karena $\bar{0}^2 = \bar{0}, \bar{1}^2 = \bar{1}$. Jadi $Id(\mathbb{Z}_5) = \{\bar{0}, \bar{1}\}$.

Contoh 2.4.4
Misalkan $(\mathbb{Z}_6, +,\cdot)$ adalah ring. Akan ditentukan $Id(\mathbb{Z}_6)$.
Bukti.

Tabel 2.6 Hasil Kuadrat Elemen di $\mathbb{Z}_6$

a	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$
a^2	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{4}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{1}$

Berdasarkan Tabel 2.6 diketahui elemen idempoten di $\mathbb{Z}_6$ adalah $\bar{0}, \bar{1}, \bar{3},$ dan $\bar{4}$, karena $\bar{0}^2 = \bar{0}$, $\bar{1}^2 = \bar{1}$, $\bar{3}^2 = \bar{3}$, $\bar{4}^2 = \bar{4}$. Jadi $Id(\mathbb{Z}_6) = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{3}, \bar{4}\}$.

Contoh 2.4.5
Misalkan $(\mathbb{Z}_8, +,\cdot)$ adalah ring. Akan ditentukan $Id(\mathbb{Z}_8)$.
Bukti.

Tabel 2.7 Hasil Kuadrat Elemen di $\mathbb{Z}_8$

a	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$	$\bar{7}$
a^2	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{4}$	$\bar{1}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{4}$	$\bar{1}$

Berdasarkan Tabel 2.7 diketahui elemen idempoten yang ada di Z_8 adalah $\bar{0}$ dan $\bar{1}$, karena $\bar{0}^2 = \bar{0}, \bar{1}^2 = \bar{1}$. Jadi $Id(Z_8) = \{\bar{0}, \bar{1}\}$.

Contoh 2.4.6
Misalkan $(\mathbb{Z}_{12}, +,\cdot)$ adalah ring. Akan ditentukan $Id(\mathbb{Z}_{12})$.
Bukti.

Tabel 2.8 Hasil Kuadrat Elemen di $\mathbb{Z}_{12}$

a	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$	$\bar{7}$	$\bar{8}$	$\bar{9}$	$\overline{10}$	$\overline{11}$
a^2	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{4}$	$\bar{9}$	$\bar{4}$	$\bar{1}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{4}$	$\bar{9}$	$\bar{4}$	$\bar{1}$

Berdasarkan Tabel 2.8 diketahui elemen idempoten yang ada di $\mathbb{Z}_{12}$ adalah, $\bar{0}, \bar{1}, \bar{4}, \bar{9}$. Jadi $Id(\mathbb{Z}_{12}) = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{4}, \bar{9}\}$.

Contoh 2.4.7
Diberikan himpunan matriks berordo 2×2, dimana elemennya adalah elemen dari $\mathbb{Z}_2$, yaitu

$$M = \left\{ \begin{bmatrix} \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \bar{1} & \bar{1} \\ \bar{1} & \bar{1} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{1} & \bar{1} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \bar{1} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{0} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \bar{1} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{1} \end{bmatrix} \right\} \subseteq M_2(\mathbb{Z}_2)$$

adalah ring. Akan ditentukan $Id(M)$
Bukti.

Tabel 2.9 Hasil Kuadrat Elemen di M

a	$\begin{bmatrix} \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \bar{1} & \bar{1} \\ \bar{1} & \bar{1} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{1} & \bar{1} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \bar{1} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{0} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \bar{1} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{1} \end{bmatrix}$
a^2	$\begin{bmatrix} \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{1} & \bar{1} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \bar{1} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{0} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \bar{1} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{1} \end{bmatrix}$

Berdasarkan Tabel 2.9 diketahui elemen idempoten yang ada di M adalah $\begin{bmatrix} \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{1} & \bar{1} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \bar{1} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{0} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \bar{1} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{1} \end{bmatrix}$.

Jadi $Id(M) = \left\{ \begin{bmatrix} \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{1} & \bar{1} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \bar{1} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{0} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \bar{1} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{1} \end{bmatrix} \right\}$.

Contoh 2.4.8
Diberikan $\mathcal{P}(\mathbb{Z})$ berdasarkan Contoh 2.3.4 adalah ring. Akan ditentukan $Id(\mathcal{P}(\mathbb{Z}))$.
Bukti.
Berdasarkan Contoh 2.3.11 diketahui $\mathcal{P}(\mathbb{Z})$ adalah ring Boolean, sehingga $Id(\mathcal{P}(\mathbb{Z})) = \{A | A \in \mathcal{P}(\mathbb{Z})\}$.

Definisi 2.4.9 (Idempoten Orthogonal)
Misalkan R adalah ring dan $a, b \in R$. Dua elemen idempoten a dan b disebut orthogonal pada R jika $ab = ba = 0$.

Contoh 2.4.10

Diberikan ring $(\mathbb{Z}_8, +, \cdot)$. Akan ditentukan elemen idempoten orthogonal di $\mathbb{Z}_8$.

Bukti.

Berdasarkan Contoh 2.4.5, diketahui elemen idempoten yang ada di $\mathbb{Z}_8$ adalah $\bar{0}$ dan $\bar{1}$. Ambil $a = \bar{0}$ dan $b = \bar{1}$, sehingga

$$ab = ba = 0$$
$$\bar{0} \cdot \bar{1} = \bar{1} \cdot \bar{0} = \bar{0}$$

Menurut Definisi 2.4.9, terbukti bahwa elemen idempoten di $\mathbb{Z}_8$ merupakan elemen idempoten orthogonal.

Definisi 2.4.11 (Ring *Weakly Boolean*)

Misalkan R adalah ring. Ring R disebut *weakly Boolean* jika untuk setiap $a \in R$ berlaku $a^2 = a$ atau $a^2 = -a$.

Contoh 2.4.12

Diberikan ring $(\mathbb{Z}_3, +, \cdot)$. Akan dibuktikan $\mathbb{Z}_3$ adalah Weakly Boolean ring.

Bukti.

Elemen dari $\mathbb{Z}_3 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}\}$

Menurut Definisi 2.4.11, diperoleh

$\bar{0}^2 = \bar{0} \rightarrow$ elemen idempoten

$\bar{1}^2 = \bar{1} \rightarrow$ elemen idempoten

$\bar{2}^2 = \bar{1} = -\bar{2}$ atau $\bar{2}^2 = -\bar{2} \rightarrow$ negatif elemen idempoten

Jadi, terbukti bahwa $\mathbb{Z}_3$ adalah $weakly\ boolean\ ring$

Definisi 2.4.13 (Elemen Nilpoten)

Misalkan R adalah ring dan $a \in R$. a disebut elemen nilpoten pada R jika terdapat $n \in \mathbb{Z}^+$ sedemikian sehingga $a^n = 0$. Himpunan semua elemen nilpoten di R dinotasikan dengan $Nil(R)$.

Contoh 2.4.14

Diberikan ring $(\mathbb{Z}_4, +, \cdot)$. Akan ditentukan $Nil(\mathbb{Z}_4)$.

Bukti.

Menurut Definisi 2.4.13 elemen nilpoten di $\mathbb{Z}_4$ adalah $\bar{0}$ karena $\bar{0}^n = \bar{0}$ dengan $n \in \mathbb{Z}^+$ dan $\bar{2}$ karena $\bar{2}^2 = \bar{0}$ dengan $n = 2 \in \mathbb{Z}^+$. Jadi $Nil(\mathbb{Z}_4) = \{\bar{0}, \bar{2}\}$.

Contoh 2.4.15
Misalkan $(\mathbb{Z}_8, +, \cdot)$ adalah ring. Akan ditentukan $Nil(\mathbb{Z}_8)$.
Bukti.
Menurut Definisi 2.4.13 elemen nilpoten di $\mathbb{Z}_8$ adalah
$\bar{0}$ karena $\bar{0}^n = \bar{0}$ dengan $n \in \mathbb{Z}^+$
$\bar{2}$ karena $\bar{2}^3 = \bar{0}$ dengan $n = 3 \in \mathbb{Z}^+$
$\bar{4}$ karena $\bar{4}^2 = \bar{0}$ dengan $n = 2 \in \mathbb{Z}^+$
$\bar{6}$ karena $\bar{6}^3 = \bar{0}$ dengan $n = 3 \in \mathbb{Z}^+$.
Jadi $Nil(\mathbb{Z}_8) = \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}, \bar{6}\}$.

Contoh 2.4.16
Misalkan $(\mathbb{Z}_{12}, +, \cdot)$ adalah ring. Tentukan $Nil(\mathbb{Z}_{12})$.
Bukti.
Menurut Definisi 2.4.13 elemen nilpoten di $\mathbb{Z}_{12}$ adalah $\bar{0}$ karena $\bar{0}^n = \bar{0}$ dengan $n \in \mathbb{Z}^+$ dan $\bar{6}$ karena $\bar{6}^2 = \bar{0}$ dengan $n = 2 \in \mathbb{Z}^+$. Jadi $Nil(\mathbb{Z}_{12}) = \{\bar{0}, \bar{6}\}$.

Contoh 2.4.17
Diberikan $\mathcal{P}(\mathbb{Z})$ berdasarkan Contoh 2.3.4 adalah ring. Akan ditentukan $Nil\big(\mathcal{P}(\mathbb{Z})\big)$.
Bukti.
Berdasarkan Definisi 2.4.13 elemen nilpoten di $\mathcal{P}(\mathbb{Z})$ adalah $\emptyset$, karena $\emptyset^n = \emptyset$ dengan $n \in \mathbb{Z}^+$. Jadi $Nil\big(\mathcal{P}(\mathbb{Z})\big) = \{\emptyset\}$.

Definisi 2.4.18 (Elemen Unipoten)
Misalkan R adalah ring dengan elemen identitas pergandaan adalah 1 dan $r \in R$. r dikatakan unipoten jika $r = 1 + b$ untuk suatu nilpotent $b \in R$.

Contoh 2.4.19
Diberikan ring komutatif dengan elemen satuan $(\mathbb{Z}_8, +, \cdot)$. Akan ditentukan elemen unipoten di $\mathbb{Z}_8$.
Bukti.
Berdasarkan Contoh 2.4.15, $Nil(\mathbb{Z}_8) = \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}, \bar{6}\}$. Berdasarkan Definisi 2.4.18, diperoleh

Tabel 2.10 Hasil dari $1 + b$ di $\mathbb{Z}_8$

b	$r = 1 + b$
$\overline{0}$	$\overline{1}$
$\overline{2}$	$\overline{3}$
$\overline{4}$	$\overline{5}$
$\overline{6}$	$\overline{7}$

Berdasarkan Tabel 2.10 diketahui elemen unipoten yang ada di $\mathbb{Z}_8$ adalah $\{\overline{1}, \overline{3}, \overline{5}, \overline{7}\}$. Jadi elemen unipoten di $(\mathbb{Z}_8) = \{\overline{1}, \overline{3}, \overline{5}, \overline{7}\}$.

Definisi 2.4.20 (Elemen Unit)
Misalkan R adalah ring komutatif dengan elemen satuan e. u disebut unit jika terdapat $v \in R$ sedemikian sehingga $uv = vu = e$. Himpunan semua elemen unit di R dinotasikan $U(R)$.

Contoh 2.4.21
Diberikan ring komutatif dengan elemen satuan $(\mathbb{Z}_6, +, \cdot)$. Akan ditentukan $U(\mathbb{Z}_6)$.
Bukti.

Tabel 2.11 Operasi pergandaan di $\mathbb{Z}_6$

$\cdot$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$
$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$
$\overline{1}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$
$\overline{2}$	$\overline{0}$	$\overline{2}$	$\overline{4}$	$\overline{0}$	$\overline{2}$	$\overline{4}$
$\overline{3}$	$\overline{0}$	$\overline{3}$	$\overline{0}$	$\overline{3}$	$\overline{0}$	$\overline{3}$
$\overline{4}$	$\overline{0}$	$\overline{4}$	$\overline{2}$	$\overline{0}$	$\overline{4}$	$\overline{2}$
$\overline{5}$	$\overline{0}$	$\overline{5}$	$\overline{4}$	$\overline{3}$	$\overline{2}$	$\overline{1}$

Berdasarkan Tabel 2.11 diperoleh
$(\overline{1})(\overline{1}) = \overline{1}$
$(\overline{5})(\overline{5}) = \overline{1}$.
Jadi $U(\mathbb{Z}_6) = \{\overline{1}, \overline{5}\}$.

Contoh 2.4.22
Diberikan ring komutatif dengan elemen satuan $(\mathbb{Z}_8, +, \cdot)$. Akan ditentukan $U(\mathbb{Z}_8)$.
Bukti.

Tabel 2.12 Operasi pergandaan di $\mathbb{Z}_8$

$\cdot$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$	$\bar{7}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
$\bar{1}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$	$\bar{7}$
$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{4}$	$\bar{6}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{4}$	$\bar{6}$
$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{3}$	$\bar{6}$	$\bar{1}$	$\bar{4}$	$\bar{7}$	$\bar{2}$	$\bar{5}$
$\bar{4}$	$\bar{0}$	$\bar{4}$	$\bar{0}$	$\bar{4}$	$\bar{0}$	$\bar{4}$	$\bar{0}$	$\bar{4}$
$\bar{5}$	$\bar{0}$	$\bar{5}$	$\bar{2}$	$\bar{7}$	$\bar{4}$	$\bar{1}$	$\bar{6}$	$\bar{3}$
$\bar{6}$	$\bar{0}$	$\bar{6}$	$\bar{4}$	$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{6}$	$\bar{4}$	$\bar{2}$
$\bar{7}$	$\bar{0}$	$\bar{7}$	$\bar{6}$	$\bar{5}$	$\bar{4}$	$\bar{3}$	$\bar{2}$	$\bar{1}$

Elemen satuan di $\mathbb{Z}_8$ terhadap operasi $(\cdot)$ adalah $\bar{1}$, sehingga dari Tabel 2.12 diperoleh $(\bar{1})(\bar{1}) = \bar{1}$, $(\bar{3})(\bar{3}) = \bar{1}$, $(\bar{5})(\bar{5}) = \bar{1}$, dan $(\bar{7})(\bar{7}) = \bar{1}$. Jadi $U(\mathbb{Z}_8) = \{\bar{1}, \bar{3}, \bar{5}, \bar{7}\}$.

Contoh 2.4.23
Diberikan ring komutatif dengan elemen satuan $(\mathbb{Z}_{12}, +, \cdot)$. Akan ditentukan $U(\mathbb{Z}_{12})$.

Bukti.

Tabel 2.13 Operasi pergandaan di $\mathbb{Z}_{12}$

$\cdot$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$	$\bar{7}$	$\bar{8}$	$\bar{9}$	$\overline{10}$	$\overline{11}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
$\bar{1}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$	$\bar{7}$	$\bar{8}$	$\bar{9}$	$\overline{10}$	$\overline{11}$
$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{4}$	$\bar{6}$	$\bar{8}$	$\overline{10}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{4}$	$\bar{6}$	$\bar{8}$	$\overline{10}$
$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{3}$	$\bar{6}$	$\bar{9}$	$\bar{0}$	$\bar{3}$	$\bar{6}$	$\bar{9}$	$\bar{0}$	$\bar{3}$	$\bar{6}$	$\bar{9}$
$\bar{4}$	$\bar{0}$	$\bar{4}$	$\bar{8}$	$\bar{0}$	$\bar{4}$	$\bar{8}$	$\bar{0}$	$\bar{4}$	$\bar{8}$	$\bar{0}$	$\bar{4}$	$\bar{8}$
$\bar{5}$	$\bar{0}$	$\bar{5}$	$\overline{10}$	$\bar{3}$	$\bar{8}$	$\bar{1}$	$\bar{6}$	$\overline{11}$	$\bar{4}$	$\bar{9}$	$\bar{2}$	$\bar{7}$
$\bar{6}$	$\bar{0}$	$\bar{6}$	$\bar{0}$	$\bar{6}$	$\bar{0}$	$\bar{6}$	$\bar{0}$	$\bar{6}$	$\bar{0}$	$\bar{6}$	$\bar{0}$	$\bar{6}$
$\bar{7}$	$\bar{0}$	$\bar{7}$	$\bar{2}$	$\bar{9}$	$\bar{4}$	$\overline{11}$	$\bar{6}$	$\bar{1}$	$\bar{8}$	$\bar{3}$	$\overline{10}$	$\bar{5}$
$\bar{8}$	$\bar{0}$	$\bar{8}$	$\bar{4}$	$\bar{0}$	$\bar{8}$	$\bar{4}$	$\bar{0}$	$\bar{8}$	$\bar{4}$	$\bar{0}$	$\bar{8}$	$\bar{4}$
$\bar{9}$	$\bar{0}$	$\bar{9}$	$\bar{6}$	$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{9}$	$\bar{6}$	$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{9}$	$\bar{6}$	$\bar{3}$
$\overline{10}$	$\bar{0}$	$\overline{10}$	$\bar{8}$	$\bar{6}$	$\bar{4}$	$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\overline{10}$	$\bar{8}$	$\bar{6}$	$\bar{4}$	$\bar{2}$
$\overline{11}$	$\bar{0}$	$\overline{11}$	$\overline{10}$	$\bar{9}$	$\bar{8}$	$\bar{7}$	$\bar{6}$	$\bar{5}$	$\bar{4}$	$\bar{3}$	$\bar{2}$	$\bar{1}$

Elemen satuan di $\mathbb{Z}_{12}$ terhadap operasi $(\cdot)$ adalah $\bar{1}$, sehingga berdasarkan Tabel 2.13 diperoleh $(\bar{1})(\bar{1}) = \bar{1}$, $(\bar{5})(\bar{5}) = \bar{1}$,

$(\bar{7})(\bar{7}) = \bar{1}$, dan $(\overline{11})(\overline{11}) = \bar{1}$. Jadi $U(\mathbb{Z}_{12}) = \{\bar{1}, \bar{5}, \bar{7}, \overline{11}\}$.

Contoh 2.4.24
Diberikan $\mathcal{P}(\mathbb{Z})$ berdasarkan Contoh 2.3.4 adalah ring. Akan ditentukan $U\big(\mathcal{P}(\mathbb{Z})\big)$.
Bukti.
Elemen satuan di $\mathcal{P}(\mathbb{Z})$ terhadap operasi pergandaan adalah $\mathbb{Z}$, sehingga $(\mathbb{Z})(\mathbb{Z}) = \mathbb{Z} \cap \mathbb{Z} = \mathbb{Z}$. Jadi $U\big(\mathcal{P}(\mathbb{Z})\big) = \{\mathbb{Z}\}$.

Contoh 2.4.25
Diberikan ring komutatif dengan elemen satuan $(\mathbb{Z}_5, +, \cdot)$. Akan ditentukan $U(\mathbb{Z}_5)$.
Bukti.

Tabel 2.14 Operasi pergandaan di $\mathbb{Z}_5$

$\cdot$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
$\bar{1}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$
$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{4}$	$\bar{1}$	$\bar{3}$
$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{3}$	$\bar{1}$	$\bar{4}$	$\bar{2}$
$\bar{4}$	$\bar{0}$	$\bar{4}$	$\bar{3}$	$\bar{2}$	$\bar{1}$

Elemen satuan di $\mathbb{Z}_5$ terhadap operasi $(\cdot)$ adalah $\bar{1}$, sehingga berdasarkan Tabel 2.14 diperoleh $(\bar{1})(\bar{1}) = \bar{1}$ dan $(\bar{4})(\bar{4}) = \bar{1}$. Jadi $U(\mathbb{Z}_5) = \{\bar{1}, \bar{4}\}$.

Definisi 2.4.26 (UU Ring)
Misalkan R adalah ring dengan elemen identitas pergandaan adalah 1. $U(R)$ adalah himpunan semua elemen unit di R dan $Nil(R)$ adalah himpunan semua elemen nilpoten di R R disebut UU ring jika setiap $u \in U(R)$ dapat ditulis sebagai $u = 1 + p$ dimana $p \in Nil(R)$.

Contoh 2.4.27
Diberikan ring komutatif dengan elemen satuan $(\mathbb{Z}_8, +, \cdot)$. Akan dibuktikan bahwa $\mathbb{Z}_8$ merupakan UU Ring.
Bukti.
Telah diketahui pada Contoh 2.4.22, bahwa $U(\mathbb{Z}_8) = \{\bar{1}, \bar{3}, \bar{5}, \bar{7}\}$ dan pada Contoh 2.4.15, $Nil(\mathbb{Z}_8) = \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}, \bar{6}\}$. Misalkan $u \in U(\mathbb{Z}_8)$ dan $p \in Nil(\mathbb{Z}_8)$, sehingga diperoleh

Tabel 2.15 Hasil dari $\overline{1} + p$ di $\mathbb{Z}_8$

u	$\overline{1} + p$
$\overline{1}$	$\overline{1} + \overline{0}$
$\overline{3}$	$\overline{1} + \overline{2}$
$\overline{5}$	$\overline{1} + \overline{4}$
$\overline{7}$	$\overline{1} + \overline{6}$

Berdasarkan Tabel 2.15, terlihat bahwa semua hasil penjumlahan $\overline{1} + p$ merupakan anggota dari elemen unit di $\mathbb{Z}_8$. Berdasarkan Definisi 2.4.26, terbukti bahwa $\mathbb{Z}_8$ merupakan UU ring.

Contoh 2.4.28

Diberikan ring komutatif dengan elemen satuan $(\mathbb{Z}_{12}, +, \cdot)$. Akan dibuktikan bahwa $\mathbb{Z}_{12}$ bukan merupakan UU Ring.

Bukti.

Telah diketahui pada Contoh 2.4.23, bahwa $U(\mathbb{Z}_{12}) = \{\overline{1}, \overline{5}, \overline{7}, \overline{11}\}$ dan pada Contoh 2.4.16, $Nil(\mathbb{Z}_{12}) = \{\overline{0}, \overline{6}\}$. Misalkan $u \in U(\mathbb{Z}_{12})$ dan $p \in Nil(\mathbb{Z}_{12})$, sehingga diperoleh

Tabel 2.16 Hasil dari $\overline{1} + p$ di $\mathbb{Z}_{12}$

u	$\overline{1} + p$
$\overline{1}$	$\overline{1} + \overline{0}$
$\overline{5}$	$-$
$\overline{7}$	$\overline{1} + \overline{6}$
$\overline{11}$	$-$

Berdasarkan Tabel 2.16, $\overline{5}$ dan $\overline{11}$ bukan merupakan anggota di $1 + p$. Menurut Definisi 2.4.26, terbukti bahwa $\mathbb{Z}_{12}$ bukan UU ring.

Definisi 2.4.29 (*Ring Exchange*)

Sebuah Ring R disebut *exchange* jika untuk setiap $x \in R$, terdapat $a \in Id(R)$ sedemikian sehingga $a \in xR$ dan $1 - a \in (1 - x)R$.

Contoh 2.4.30

Diberikan ring $(\mathbb{Z}_5, +, \cdot)$. Akan dibuktikan bahwa $\mathbb{Z}_5$ *ring exchange*.

Bukti.

Berdasarkan Contoh 2.4.3, elemen idempoten di $\mathbb{Z}_5$ adalah $\{\overline{0}, \overline{1}\}$, sehingga

Tabel 2.17 Hasil dari $1 - e \in (1 - x)R$ di $\mathbb{Z}_5$

$x \in \mathbb{Z}_6$	$a \in Id(\mathbb{Z}_5)$	$a \in x\mathbb{Z}_5$	$\bar{1} - a$	$\bar{1} - x$	$(\bar{1} - a) \in (\bar{1} - x)\mathbb{Z}_5$
$x = \bar{0}$	$e = \bar{0}$	$\bar{0} \in \bar{0}\mathbb{Z}_5$	$\bar{1} - \bar{0}$	$\bar{1} - \bar{0}$	$\bar{1} \in \bar{1}\mathbb{Z}_5$
	$e = \bar{1}$	$\bar{1} \in \bar{0}\mathbb{Z}_5$	$\bar{1} - \bar{1}$	$\bar{1} - \bar{0}$	$\bar{0} \in \bar{1}\mathbb{Z}_5$
$x = \bar{1}$	$e = \bar{1}$	$\bar{1} \in \bar{1}\mathbb{Z}_5$	$\bar{1} - \bar{1}$	$\bar{1} - \bar{1}$	$\bar{0} \in \bar{0}\mathbb{Z}_5$
$x = \bar{2}$	$e = \bar{0}$	$\bar{0} \in \bar{2}\mathbb{Z}_5$	$\bar{1} - \bar{0}$	$\bar{1} - \bar{2}$	$\bar{1} \in \bar{4}\mathbb{Z}_5$
	$e = \bar{1}$	$\bar{1} \in \bar{2}\mathbb{Z}_5$	$\bar{1} - \bar{1}$	$\bar{1} - \bar{2}$	$\bar{0} \in \bar{4}\mathbb{Z}_5$
$x = \bar{3}$	$e = \bar{0}$	$\bar{0} \in \bar{3}\mathbb{Z}_5$	$\bar{1} - \bar{0}$	$\bar{1} - \bar{3}$	$\bar{1} \in \bar{3}\mathbb{Z}_5$
	$e = \bar{1}$	$\bar{1} \in \bar{3}\mathbb{Z}_5$	$\bar{1} - \bar{1}$	$\bar{1} - \bar{3}$	$\bar{0} \in \bar{3}\mathbb{Z}_5$
$x = \bar{4}$	$e = \bar{0}$	$\bar{0} \in \bar{4}\mathbb{Z}_5$	$\bar{1} - \bar{0}$	$\bar{1} - \bar{4}$	$\bar{1} \in \bar{2}\mathbb{Z}_5$
	$e = \bar{1}$	$\bar{1} \in \bar{4}\mathbb{Z}_5$	$\bar{1} - \bar{1}$	$\bar{1} - \bar{4}$	$\bar{0} \in \bar{2}\mathbb{Z}_5$

Berdasarkan Definisi 2.4.28, dapat disimpulkan $\mathbb{Z}_5$ *ring exchange*.

2.5 Ideal

Berikut diberikan definisi serta contoh ideal, ideal maksimal, ideal prima yang dikutip dari Andari (2014), radikal prima, nil radikal atas, J-primal, 2-primal, dan J-*reduced* yang dikutip Danchev (2017b), radikal Jacobson yang dikutip dari Puguh, dkk. (2014), serta nil ideal dan nil radikal bawah yang dikutip dari Kwak, dkk. (2018).

Definisi 2.5.1 (Ideal)
Misalkan R adalah ring. I adalah himpunan tak kosong dan himpunan bagian di R. I disebut ideal jika dan hanya jika

i. Untuk setiap $a, b \in I$, berlaku $a - b \in I$
ii. Untuk setiap $a \in I, r \in R, berlaku$
   a. $ra \in I$ disebut ideal kiri
   b. $ar \in I$ disebut ideal kanan
   c. $ra \in I$dan $ar \in I$ disebut ideal dua sisi

Contoh 2.5.2
Diberikan ring komutatif $(\mathbb{Z}_4, +, \cdot)$. $I = \{\bar{0}, \bar{2}\}$ adalah himpunan bagian di $\mathbb{Z}_4$. Akan ditunjukkan I adalah ideal dua sisi di $\mathbb{Z}_4$.
Bukti.
Berdasarkan Definisi 2.5.1, diperoleh

i. Untuk setiap $a, b \in I$ berlaku $a - b \in I$.

Tabel 2.18 Hasil dari $a - b$

$-$	$\bar{0}$	$\bar{2}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$
$\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{0}$

ii. Untuk setiap $a \in I, r \in \mathbb{Z}_4$ berlaku $ar \in I$ dan $ra \in I$.

Tabel 2.19 Hasil dari ar

a	r	ar	ra
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
	$\bar{1}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
	$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
	$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{2}$
	$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
	$\bar{3}$	$\bar{2}$	$\bar{2}$

Beradasarkan Tabel 2.18, terlihat bahwa $a - b \in I$ dan berdasarkan Tabel 2.19, terlihat bahwa $ar \in I$ dan $ra \in I$. Berdasarkan Definisi 2.5.1 terbukti I adalah ideal dua sisi di $\mathbb{Z}_4$.

Definisi 2.5.3 (Ring Faktor)
Misalkan R adalah ring. I adalah ideal di R. R/I adalah himpunan semua koset-koset dari I di R dan didefinisikan:

i. $(a + I) + (b + I) = (a + b) + I$
ii. $(a + I)(b + I) = (ab) + I$
iii. $-(a + I) = -a + I$, dengan $a, b \in R$.

Dengan operasi seperti di atas, maka R/I disebut ring faktor atau ring klas residu atau ring *quotient*.

Contoh 2.5.4
Diberikan ring $(\mathbb{Z}_6, +, \cdot)$. $I = \{\bar{0}, \bar{3}\}$ adalah ideal di $\mathbb{Z}_6$.
$\mathbb{Z}_6/I = \{\bar{0} + I, \bar{1} + I, \bar{2} + I\}$ adalah himpunan koset-koset dari I di $\mathbb{Z}_6$. Akan ditunjukkan $\mathbb{Z}_6/I$ adalah ring faktor.
Bukti.

Tabel 2.20 Operasi Penjumlahan dan Pergandaan pada $\mathbb{Z}_6/I$

$+$	$\bar{0}+I$	$\bar{1}+I$	$\bar{2}+I$
$\bar{0}+I$	$\bar{0}+I$	$\bar{1}+I$	$\bar{2}+I$
$\bar{1}+I$	$\bar{1}+I$	$\bar{2}+I$	$\bar{0}+I$
$\bar{2}+I$	$\bar{2}+I$	$\bar{0}+I$	$\bar{1}+I$

$\cdot$	$\bar{0}+I$	$\bar{1}+I$	$\bar{2}+I$
$\bar{0}+I$	$\bar{0}+I$	$\bar{0}+I$	$\bar{0}+I$
$\bar{1}+I$	$\bar{0}+I$	$\bar{1}+I$	$\bar{2}+I$
$\bar{2}+I$	$\bar{0}+I$	$\bar{2}+I$	$\bar{1}+I$

Berdasarkan Tabel 2.20 akan dibuktikan $\mathbb{Z}_6/I$ ring.
Ambil $x, y, z \in \mathbb{Z}_6/I$.
$x = \bar{0} + I$, $\quad y = \bar{1} + I,$ $\quad z = \bar{2} + I.$

I. $(\mathbb{Z}_6/I, +)$ grup komutatif

i. Tertutup

$$\begin{aligned} x + y &= (\bar{0} + I) + (\bar{1} + I) \\ &= \bar{0} + \bar{1} + I + I \\ &= \bar{1} + I \in \mathbb{Z}_6/I \end{aligned}$$

ii. Assosiatif

$$\begin{aligned} (x + y) + z &= \big((\bar{0} + I) + (\bar{1} + I)\big) + (\bar{2} + I) \\ &= (\bar{0} + \bar{1}) + I + (\bar{2} + I) \\ &= (\bar{0} + \bar{1}) + \bar{2} + I \\ &= \bar{0} + (\bar{1} + \bar{2}) + I \\ &= (\bar{0} + I) + \big((\bar{1} + I) + (\bar{2} + I)\big) \end{aligned}$$

iii. Mempunyai elemen netral, yaitu $\bar{0} + I$ karena

$$\begin{aligned} (\bar{0} + I) + (\bar{1} + I) &= (\bar{0} + \bar{1}) + I + I \\ &= \bar{1} + I \\ (\bar{1} + I) + (\bar{0} + I) &= (\bar{1} + \bar{0}) + I + I \\ &= \bar{1} + I \end{aligned}$$

iv. Setiap elemen mempunyai invers

Dari Tabel 2.20 dapat dilihat bahwa
Invers dari $\bar{0} + I$ adalah $\bar{0} + I$
Invers dari $\bar{1} + I$ adalah $\bar{2} + I$
Invers dari $\bar{2} + I$ adalah $\bar{1} + I$

v. Komutatif

$$x + y = (\bar{0} + I) + (\bar{1} + I)$$
$$= (\bar{0} + \bar{1}) + I$$
$$= (\bar{1} + \bar{0}) + I$$
$$= (\bar{1} + I) + (\bar{0} + I) = y + x$$

II. $(\mathbb{Z}_6/I, \cdot)$ semigrup

i. Tertutup

$$x \cdot y = (\bar{0} + I) \cdot (\bar{1} + I) = \bar{0} + I \in \mathbb{Z}_6/I$$

ii. Assosiatif

$$(x + y) + z = \left((\bar{0} + I) \cdot (\bar{1} + I)\right) \cdot (\bar{2} + I)$$
$$= ((\bar{0} \cdot \bar{1}) + I) \cdot (\bar{2} + I)$$
$$= (\bar{0} \cdot \bar{1}) \cdot \bar{2} + I$$
$$= \bar{0} \cdot (\bar{1} \cdot \bar{2}) + I$$
$$= (\bar{0} + I) \cdot ((\bar{1} + I) \cdot (\bar{2} + I))$$
$$= x + (y + z)$$

III. Berlaku hukum distributif

$$x(y + z) = (\bar{0} + I) \cdot \left((\bar{1} + I) + (\bar{2} + I)\right)$$
$$= (\bar{0} + I) \cdot ((\bar{1} + \bar{2}) + I)$$
$$= (\bar{0} \cdot (\bar{1} + \bar{2}) + I)$$
$$= \left((\bar{0} \cdot \bar{1} + \bar{0} \cdot \bar{2}) + I\right)$$
$$= (\bar{0} \cdot \bar{1} + I) + (\bar{0} \cdot \bar{2} + I)$$
$$= (\bar{0} + I) \cdot (\bar{1} + I) + (\bar{0} + I) \cdot (\bar{2} + I)$$
$$= (x \cdot y) + (x \cdot z)$$

$$(x + y)z = \left((\bar{0} + I) + (\bar{1} + I)\right) \cdot (\bar{2} + I)$$
$$= ((\bar{0} + \bar{1}) + I) \cdot (\bar{2} + I)$$
$$= ((\bar{0} + \bar{1}) \cdot \bar{2} + I)$$
$$= \left((\bar{0} \cdot \bar{2} + \bar{1} \cdot \bar{2}) + I\right)$$
$$= (\bar{0} \cdot \bar{2} + I) + (\bar{1} \cdot \bar{2} + I)$$
$$= (\bar{0} + I) \cdot (\bar{2} + I) + (\bar{1} + I) \cdot (\bar{2} + I)$$
$$= (x \cdot z) + (y \cdot z)$$

Jadi $\mathbb{Z}_6/I$ merupakan ring.

Definisi 2.5.5 (Ideal Maksimal)

Suatu ideal M di dalam ring R disebut maksimal bila dan hanya bila

i. $M \neq R$ dan
ii. Tidak ada ideal N di R sedemikian sehingga $M \subset N \subset R$.

Contoh 2.5.6
Diberikan ring komutatif $(\mathbb{Z}_4, +, \cdot)$. $I = \{\bar{0}, \bar{2}\}$ dan $A = \{\bar{0}\}$ masing-masing merupakan ideal di $\mathbb{Z}_4$. Akan ditentukan semua ideal maksimal di $\mathbb{Z}_4$.
Bukti.
Berdasarkan Definisi 2.5.5 diperoleh $I = \{\bar{0}, \bar{2}\}$ adalah ideal maksimal di $\mathbb{Z}_4$, karena I tidak termuat dalam ideal lainnya selain dirinya sendiri dan $\mathbb{Z}_4$, sedangkan A bukan ideal maksimal karena A termuat di dalam I.

Contoh 2.5.7
Diberikan ring komutatif $(\mathbb{Z}_8, +, \cdot)$. $I = \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}, \bar{6}\}$ dan $A = \{\bar{0}, \bar{4}\}$ masing-masing merupakan ideal di $\mathbb{Z}_8$. Akan ditentukan semua ideal maksimal di $\mathbb{Z}_8$.
Bukti.
Berdasarkan Definisi 2.5.5 diperoleh $I = \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}, \bar{6}\}$ adalah ideal maksimal di $\mathbb{Z}_8$, karena I tidak termuat dalam ideal lainnya selain dirinya sendiri dan $\mathbb{Z}_8$, sedangkan A bukan ideal maksimal karena A termuat di dalam I.

Contoh 2.5.8
Diberikan ring komutatif $(\mathbb{Z}_{12}, +, \cdot)$. $I = \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}, \bar{6}, \bar{8}, \overline{10}\}$, $A = \{\bar{0}, \bar{3}, \bar{6}, \bar{9}\}$, dan $B = \{\bar{0}, \bar{4}, \bar{8}\}$ masing-masing merupakan ideal di $\mathbb{Z}_{12}$. Akan ditentukan semua ideal maksimal di $\mathbb{Z}_{12}$.
Bukti.
Berdasarkan Definisi 2.5.5 diperoleh $I = \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}, \bar{6}, \bar{8}, \overline{10}\}$ dan $A = \{\bar{0}, \bar{3}, \bar{6}, \bar{9}\}$ adalah ideal maksimal di $\mathbb{Z}_{12}$, karena I dan A tidak termuat dalam ideal lainnya selain dirinya sendiri dan $\mathbb{Z}_{12}$, sedangkan B bukan ideal maksimal karena B termuat di dalam I.

Definisi 2.5.9 (Ideal Prima)
Misalkan R adalah ring. P adalah ideal di R. P disebut ideal prima jika $ab \in P$, maka $a \in P$ atau $b \in P$ untuk setiap $a, b \in P$.

Contoh 2.5.10
Misalkan $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ ring komutatif. $P = 4\mathbb{Z}$ adalah ideal di $\mathbb{Z}$. Akan dibuktikan $4\mathbb{Z}$ bukan ideal prima.
Bukti.

Pilih $a = 2 \notin 4\mathbb{Z}$ dan $b = 6 \notin 4\mathbb{Z}$, diperoleh

$$ab = 2 \cdot 6 = 12 \in P$$

Berdasarkan kontraposisi dari Definisi 2.5.9, yaitu jika $a \notin P$ dan $b \notin P$, maka $ab \notin P$, terbukti bahwa $4\mathbb{Z}$ bukan merupakan ideal prima.

Contoh 2.5.11

Diberikan ring komutatif $(\mathbb{Z}_{12}, +, \cdot)$. $I = \{\overline{0}, \overline{2}, \overline{4}, \overline{6}, \overline{8}, \overline{10}\}$, $A = \{\overline{0}, \overline{3}, \overline{6}, \overline{9}\}$ masing-masing merupakan ideal di $\mathbb{Z}_{12}$. Akan dibuktikan bahwa I dan A merupakan ideal prima.

Bukti.

I. $A = \{\overline{0}, \overline{3}, \overline{6}, \overline{9}\}$ merupakan ideal di $\mathbb{Z}_{12}$. Akan dibuktikan bahwa A ideal prima

$\overline{0} = ab = \overline{3} \cdot \overline{0} \rightarrow \overline{3} \in A$ atau $\overline{0} \in A$

$\overline{3} = ab = \overline{3} \cdot \overline{1} \rightarrow \overline{3} \in A$ atau $\overline{1} \notin A$

$\overline{6} = ab = \overline{3} \cdot \overline{2} \rightarrow \overline{3} \in A$ atau $\overline{2} \notin A$

$\overline{9} = ab = \overline{3} \cdot \overline{3} \rightarrow \overline{3} \in A$ atau $\overline{3} \in A$

Berdasarkan Definisi 2.5.9, terbukti bahwa A merupakan ideal prima.

II. $I = \{\overline{0}, \overline{2}, \overline{4}, \overline{6}, \overline{8}, \overline{10}\}$ merupakan ideal di $\mathbb{Z}_{12}$. Akan dibuktikan bahwa I ideal prima

$\overline{0} = ab = \overline{2} \cdot \overline{0} \rightarrow \overline{2} \in I$ atau $\overline{0} \in I$

$\overline{2} = ab = \overline{2} \cdot \overline{1} \rightarrow \overline{2} \in I$ atau $\overline{1} \notin I$

$\overline{4} = ab = \overline{2} \cdot \overline{2} \rightarrow \overline{2} \in I$ atau $\overline{2} \in I$

$\overline{6} = ab = \overline{2} \cdot \overline{3} \rightarrow \overline{2} \in I$ atau $\overline{3} \notin I$

$\overline{8} = ab = \overline{2} \cdot \overline{4} \rightarrow \overline{2} \in I$ atau $\overline{4} \in I$

$\overline{10} = ab = \overline{2} \cdot \overline{5} \rightarrow \overline{2} \in I$ atau $\overline{5} \notin I$

Berdasarkan Definisi 2.5.9, terbukti bahwa I merupakan ideal prima.

Contoh 2.5.12

Diberikan ring komutatif $(\mathbb{Z}_8, +, \cdot)$. $A = \{\overline{0}, \overline{2}, \overline{4}, \overline{6}\}$ merupakan ideal di $\mathbb{Z}_8$. Akan dibuktikan bahwa A merupakan ideal prima.

Bukti.

$A = \{\overline{0}, \overline{2}, \overline{4}, \overline{6}\}$ merupakan ideal di $\mathbb{Z}_8$. Akan dibuktikan bahwa A ideal prima

$\overline{0} = ab = \overline{2} \cdot \overline{0} \rightarrow \overline{2} \in A$ atau $\overline{0} \in A$

$\overline{2} = ab = \overline{2} \cdot \overline{1} \rightarrow \overline{2} \in A$ atau $\overline{1} \notin A$

$\overline{4} = ab = \overline{2} \cdot \overline{2} \rightarrow \overline{2} \in A$ atau $\overline{2} \in A$
$\overline{6} = ab = \overline{2} \cdot \overline{3} \rightarrow \overline{2} \in A$ atau $\overline{3} \notin A$
Berdasarkan Definisi 2.5.9, terbukti bahwa A merupakan ideal prima.

Definisi 2.5.13 (Radikal Prima)
Misalkan R adalah ring. Radikal prima di R dinotasikan $P(R)$ adalah irisan dari semua ideal prima di dalam R.

Contoh 2.5.14
Diberikan ring komutatif $(\mathbb{Z}_8, +, \cdot)$. $A = \{\overline{0}, \overline{2}, \overline{4}, \overline{6}\}$ adalah ideal di $\mathbb{Z}_8$. Akan ditentukan $P(\mathbb{Z}_8)$.
Bukti.
Telah diketahui pada Contoh 2.5.12 bahwa ideal prima di $\mathbb{Z}_8$ adalah $A = \{\overline{0}, \overline{2}, \overline{4}, \overline{6}\}$. Berdasarkan Definisi 2.5.13, $A = \{\overline{0}, \overline{2}, \overline{4}, \overline{6}\}$ juga merupakan radikal primal di $\mathbb{Z}_8$ Jadi, $P(\mathbb{Z}_8) = \{\overline{0}, \overline{2}, \overline{4}, \overline{6}\}$.

Contoh 2.5.15
Diberikan ring komutatif $(\mathbb{Z}_{12}, +, \cdot)$. $I = \{\overline{0}, \overline{2}, \overline{4}, \overline{6}, \overline{8}, \overline{10}\}$ dan $A = \{\overline{0}, \overline{3}, \overline{6}, \overline{9}\}$. adalah ideal di $\mathbb{Z}_{12}$. Akan ditentukan $P(\mathbb{Z}_{12})$.
Bukti.
Telah diketahui pada Contoh 2.5.11 bahwa ideal prima di $\mathbb{Z}_{12}$ adalah $I = \{\overline{0}, \overline{2}, \overline{4}, \overline{6}, \overline{8}, \overline{10}\}$ dan $A = \{\overline{0}, \overline{3}, \overline{6}, \overline{9}\}$. Berdasarkan Definisi 2.5.13 diperoleh

$$I \cap A = \{\overline{0}, \overline{6}\}$$

Jadi, $P(\mathbb{Z}_{12}) = \{\overline{0}, \overline{6}\}$.

Definisi 2.5.16 (Radikal Jacobson)
Misalkan R adalah ring. Radikal Jacobson di R dinotasikan $J(R)$ adalah irisan dari semua ideal maksimal dalam R.

Contoh 2.5.17
Diberikan adalah ring komutatif $(\mathbb{Z}_4, +, \cdot)$. $I = \{\overline{0}, \overline{2}\}$ adalah ideal di $\mathbb{Z}_4$. Akan ditentukan $J(\mathbb{Z}_4)$.
Bukti.
Berdasarkan Contoh 2.5.6, diketahui bahwa ideal maksimal di $\mathbb{Z}_4$ adalah $I = \{\overline{0}, \overline{2}\}$, sehingga radikal Jacobson di $\mathbb{Z}_4$ adalah
$J(\mathbb{Z}_4) = \{\overline{0}, \overline{2}\}$.

Contoh 2.5.18
Diberikan ring komutatif $(\mathbb{Z}_8, +, \cdot)$. $I = \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}, \bar{6}\}$ adalah ideal di $\mathbb{Z}_8$. Akan ditentukan $J(\mathbb{Z}_8)$.
Bukti.
Berdasarkan Contoh 2.5.7, diketahui bahwa ideal maksimal di $\mathbb{Z}_8$ adalah $I = \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}, \bar{6}\}$, sehingga $J(\mathbb{Z}_8) = \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}, \bar{6}\}$.

Contoh 2.5.19
Diberikan ring komutatif $(\mathbb{Z}_{12}, +, \cdot)$. $I = \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}, \bar{6}, \bar{8}, \overline{10}\}$,
$A = \{\bar{0}, \bar{3}, \bar{6}, \bar{9}\}, B = \{\bar{0}, \bar{4}, \bar{8}\}$, dan $C = \{\bar{0}, \bar{6}\}$ adalah semua ideal di $\mathbb{Z}_{12}$. Akan ditentukan $J(\mathbb{Z}_{12})$.
Bukti.
Telah diketahui pada Contoh 2.5.8 bahwa ideal maksimal di $\mathbb{Z}_{12}$ adalah I dan A. Berdasarkan Definisi 2.5.16 diperoleh

$$I \cap A = \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}, \bar{6}, \bar{8}, \overline{10}\} \cap \{\bar{0}, \bar{3}, \bar{6}, \bar{9}\} = \{\bar{0}, \bar{6}\}$$

Jadi, $J(\mathbb{Z}_{12}) = \{\bar{0}, \bar{6}\}$.

Definisi 2.5.20 (Ideal Nil)
Misalkan R adalah ring dan I adalah ideal di R. I adalah ideal nil atau ideal nilpoten di R jika untuk setiap $a \in I$ adalah elemen nilpoten.

Contoh 2.5.21
Misalkan $(\mathbb{Z}_8, +, \cdot)$ adalah ring. $I = \{\bar{0}, \bar{4}\}$ dan $A = \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}, \bar{6}\}$ adalah ideal di $\mathbb{Z}_8$. Akan dibuktikan I dan A merupakan ideal nil di $\mathbb{Z}_8$.
Bukti.
Telah diketahui pada Contoh 2.4.15 bahwa elemen nilpotent di $\mathbb{Z}_8$ adalah $Nil(\mathbb{Z}_8) = \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}, \bar{6}\}$, sehingga menurut Definisi 2.5.20 terbukti bahwa $I = \{\bar{0}, \bar{4}\}$ dan $A = \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}, \bar{6}\}$ adalah ideal nil di $\mathbb{Z}_8$.

Definisi 2.5.22 (Nil Radikal Atas)
Misalkan R adalah ring. Nil radikal atas dari R yang dinotasikan $Nil^*(R)$ didefinisikan sebagai jumlah semua ideal nil dua sisi di R. Dengan demikian $Nil^*(R)$ adalah ideal nil terbesar di R.

Contoh 2.5.23
Misalkan $(\mathbb{Z}_8, +, \cdot)$ adalah ring. $I = \{\bar{0}, \bar{4}\}$ dan $A = \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}, \bar{6}\}$ adalah ideal di $\mathbb{Z}_8$. Akan ditentukan nil radikal atas di $\mathbb{Z}_8$.

Bukti.
Telah diketahui pada Contoh 2.5.21 bahwa $I = \{\bar{0}, \bar{4}\}$ dan $A = \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}, \bar{6}\}$ adalah ideal nil di $\mathbb{Z}_8$. Berdasarkan Definisi 2.5.22, diperoleh

$$\begin{aligned} Nil^*(\mathbb{Z}_8) &= I + A \\ &= \{\bar{0}, \bar{4}\} + \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}, \bar{6}\} \\ &= \{\bar{0}, \bar{6}, \bar{4}, \bar{6}\} \end{aligned}$$

Jadi, nil radikal atas di $\mathbb{Z}_8$ adalah $Nil^*(\mathbb{Z}_8) = \{\bar{0}, \bar{6}, \bar{4}, \bar{6}\}$.

Definisi 2.5.24 (Nil Radikal Bawah)
Misalkan R adalah ring. Nil radikal bawah dari R yang dinotasikan $Nil_*(R)$ didefinisikan sebagai irisan atau perpotongan dari semua ideal prima di R.

Contoh 2.5.25
Diberikan ring $(\mathbb{Z}_{12}, +, \cdot)$. $A = \{\bar{0}, \bar{3}, \bar{6}, \bar{9}\}$ dan $I = \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}, \bar{6}, \bar{8}, \overline{10}\}$ adalah ideal di $\mathbb{Z}_{12}$. Akan ditentukan nil radikal bawah di $\mathbb{Z}_{12}$.
Bukti.
Telah diketahui pada Contoh 2.5.11 bahwa ideal prima di $\mathbb{Z}_{12}$ adalah $I = \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}, \bar{6}, \bar{8}, \overline{10}\}$ dan $A = \{\bar{0}, \bar{3}, \bar{6}, \bar{9}\}$. Berdasarkan Definisi 2.5.24 diperoleh $I \cap A = \{\bar{0}, \bar{6}\}$. Jadi, $Nil_*(\mathbb{Z}_{12}) = \{\bar{0}, \bar{6}\}$.

Definisi 2.5.26 (J-primal)
Misalkan R adalah ring. Ring R disebut J-primal jika radikal prima $P(R)$ sama dengan radikal Jacobson $J(R)$.

Contoh 2.5.27
Diberikan ring komutatif $(\mathbb{Z}_8, +, \cdot)$. Akan dibuktikan bahwa $\mathbb{Z}_8$ merupakan J-Primal.
Bukti.
Telah diketahui dari Contoh 2.5.14 bahwa $P(\mathbb{Z}_8) = \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}, \bar{6}\}$ dan dari Contoh 2.5.18, $J(\mathbb{Z}_8) = \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}, \bar{6}\}$. Berdasarkan Definisi 2.5.26 terbukti $P(\mathbb{Z}_8) = J(\mathbb{Z}_8)$, sehingga dapat disimpulkan bahwa $\mathbb{Z}_8$ merupakan J-Primal.

Contoh 2.5.28
Diberikan ring komutatif $(\mathbb{Z}_{12}, +, \cdot)$. Akan dibuktikan bahwa $\mathbb{Z}_{12}$ merupakan J-Primal.

Bukti.
Telah diketahui dari Contoh 2.5.15 bahwa $P(\mathbb{Z}_{12}) = \{\bar{0}, \bar{6}\}$ dan dari Contoh 2.5.19, $J(\mathbb{Z}_{12}) = \{\bar{0}, \bar{6}\}$. Berdasarkan Definisi 2.5.26 terbukti $P(\mathbb{Z}_{12}) = J(\mathbb{Z}_{12})$, sehingga terbukti bahwa $\mathbb{Z}_{12}$ merupakan J-Primal.

Definisi 2.5.29 (2-primal)
Misalkan R adalah ring. Ring R disebut 2-primal jika radikal prima $P(R)$ sama dengan elemen nilpoten $Nil(R)$.

Contoh 2.5.30
Diberikan ring komutatif $(\mathbb{Z}_{12}, +, \cdot)$. Akan dibuktikan bahwa $\mathbb{Z}_{12}$ merupakan 2-primal.
Bukti.
Telah diketahui dari Contoh 2.5.15 bahwa $P(\mathbb{Z}_{12}) = \{\bar{0}, \bar{6}\}$ dan dari Contoh 2.4.16 bahwa $Nil(\mathbb{Z}_{12}) = \{\bar{0}, \bar{6}\}$. Berdasarkan Definisi 2.5.29 terbukti bahwa $P(\mathbb{Z}_{12}) = Nil(\mathbb{Z}_{12})$, sehingga dapat disimpulkan bahwa $\mathbb{Z}_{12}$ merupakan 2-primal.

Definisi 2.5.31 (*J-Reduced*)
Misalkan R adalah ring. $J(R)$ adalah radikal Jacobson dan $Nil(R)$ adalah elemen nilpoten. R disebut J-*reduced* jika $Nil(R) \subseteq J(R)$.

Contoh 2.5.32
Diberikan ring $(\mathbb{Z}_{12}, +, \cdot)$. Akan dibuktikan bahwa $(\mathbb{Z}_{12}, +, \cdot)$ adalah J-*reduced.*
Bukti.
Telah diketahui pada Contoh 2.4.16 bahwa $Nil(\mathbb{Z}_{12}) = \{\bar{0}, \bar{6}\}$. Pada Contoh 2.5.19, diketahui bahwa $J(\mathbb{Z}_{12}) = \{\bar{0}, \bar{6}\}$, sehingga $Nil(\mathbb{Z}_{12}) \subseteq J(\mathbb{Z}_{12})$. Berdasarkan Definisi 2.5.31, terbukti bahwa $(\mathbb{Z}_{12}, +, \cdot)$ adalah J-*reduced.*

Contoh 2.5.33
Diberikan ring $(\mathbb{Z}_8, +, \cdot)$. Akan dibuktikan bahwa $(\mathbb{Z}_8, +, \cdot)$ adalah J-*reduced.*
Bukti.
Telah diketahui pada Contoh 2.4.15 bahwa $Nil(\mathbb{Z}_8) = \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}, \bar{6}\}$. Pada Contoh 2.5.18, diketahui bahwa $J(\mathbb{Z}_8) = \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}, \bar{6}\}$. Berdasarkan Definisi 2.5.31, terbukti bahwa $(\mathbb{Z}_8, +, \cdot)$ J-*reduced.*

2.6 *Ring Clean*

Berikut diberikan definisi yang berkaitan dengan *ring clean* dan *ring strongly clean* yang dikutip dari Danchev (2017b), serta *ring weakly clean* yang dikutip dari Danchev dan Govern (2015).

Definisi 2.6.1 (*Ring Clean* dan *Ring Strongly Clean*)
Misalkan R adalah ring. R disebut *clean* jika untuk setiap $x \in R$ terdapat $u \in U(R)$ dan $a \in Id(R)$ sedemikian sehingga $x = u + a$. Jika kondisi komutatif $ua = au$ terpenuhi, maka *ring clean* R dikatakan *strongly clean.*

Contoh 2.6.2
Diberikan ring komutatif dengan elemen satuan $(\mathbb{Z}_8, +,\cdot)$. Akan dibuktikan $\mathbb{Z}_8$ merupakan ring clean.
Bukti.
Dibuktikan bahwa untuk setiap $r \in \mathbb{Z}_8$ dapat ditulis $x = u + a$ dimana $u \in U(\mathbb{Z}_8)$ dan $a \in Id(\mathbb{Z}_8)$. Telah diketahui dari Contoh 2.4.5, $Id(\mathbb{Z}_8) = \{\overline{0}, \overline{1}\}$ dan pada Contoh 2.4.22, diketahui bahwa $U(\mathbb{Z}_8) = \{\overline{1}, \overline{3}, \overline{5}, \overline{7}\}$

Tabel 2.21 Hasil dari $u + a$ di $\mathbb{Z}_8$

u	a	$x = u + a$
$\overline{7}$	$\overline{1}$	$\overline{0}$
$\overline{1}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$
$\overline{1}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$
$\overline{3}$	$\overline{0}$	$\overline{3}$
$\overline{3}$	$\overline{1}$	$\overline{4}$
$\overline{5}$	$\overline{0}$	$\overline{5}$
$\overline{5}$	$\overline{1}$	$\overline{6}$
$\overline{7}$	$\overline{0}$	$\overline{7}$

Berdasarkan Tabel 2.21 diketahui semua elemen di $\mathbb{Z}_8$ merupakan hasil dari penjumlahan elemen idempoten dan unit di $\mathbb{Z}_8$. Jadi terbukti $\mathbb{Z}_8$ adalah ring clean.

Contoh 2.6.4
Misalkan $(\mathbb{Z}_{12}, +,\cdot)$ adalah ring komutatif dengan elemen satuan. Akan dibuktikan $\mathbb{Z}_{12}$ merupakan *ring strongly clean.*
Bukti.

Telah diketahui dari Contoh 2.4.23 bahwa elemen unit di $\mathbb{Z}_{12}$ $U(\mathbb{Z}_{12}) = \{\bar{1}, \bar{5}, \bar{7}, \overline{11}\}$ dan dari Contoh 2.4.6, $Id(\mathbb{Z}_{12}) = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{4}, \bar{9}\}$. Akan dibuktikan bahwa $\mathbb{Z}_{12}$ *ring clean*. Berdasarkan Definisi 2.6.1 diperoleh

Tabel 2.22 Hasil dari $u + a$ dan $ua = au$ di $\mathbb{Z}_{12}$

u	a	$x = u + a$	ua	au
$\overline{11}$	$\bar{1}$	$\bar{0}$	$\overline{11}$	$\overline{11}$
$\bar{1}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{1}$	$\bar{1}$
$\overline{11}$	$\bar{4}$	$\bar{3}$	$\bar{8}$	$\bar{8}$
$\bar{7}$	$\bar{9}$	$\bar{4}$	$\bar{3}$	$\bar{3}$
$\bar{5}$	$\bar{0}$	$\bar{5}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
$\bar{5}$	$\bar{1}$	$\bar{6}$	$\bar{5}$	$\bar{5}$
$\bar{7}$	$\bar{0}$	$\bar{7}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
$\bar{7}$	$\bar{1}$	$\bar{8}$	$\bar{7}$	$\bar{7}$
$\bar{5}$	$\bar{4}$	$\bar{9}$	$\bar{8}$	$\bar{8}$
$\bar{1}$	$\bar{9}$	$\overline{10}$	$\bar{9}$	$\bar{9}$
$\bar{7}$	$\bar{4}$	$\overline{11}$	$\bar{4}$	$\bar{4}$

Berdasarkan Tabel 2.22 diketahui semua elemen di $\mathbb{Z}_{12}$ merupakan hasil dari penjumlahan elemen idempoten dan unit di $\mathbb{Z}_{12}$. Jadi terbukti $\mathbb{Z}_{12}$ adalah ring clean. Berdasarkan Tabel 2.22 diketahui bahwa kondisi komutatif $ua = au$ dipenuhi, sehingga dapat disimpulkan bahwa $\mathbb{Z}_{12}$ adalah *ring strongly clean.*

Contoh 3.1.5

Misalkan $\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$ adalah ring. Akan dibuktikan $\mathbb{Z}$ bukan ring clean.

Bukti.

Elemen unit di $\mathbb{Z}$ adalah $U(\mathbb{Z}) = \{-1,1\}$.

Elemen idempoten di $\mathbb{Z}$ adalah $Id(\mathbb{Z}) = \{0,1\}$.

Berdasarkan Definisi 2.6.1 diperoleh

$$\begin{aligned} x &= u + a \\ &= \{-1,1\} + \{0,1\} \\ &= \{-1,0,1,2\} \end{aligned}$$

Diketahui bahwa hasil dari penjumlahan elemen idempoten dan elemen unit di $\mathbb{Z}$ tidak memuat semua elemen di $\mathbb{Z}$. Jadi terbukti bahwa $\mathbb{Z}$ bukan merupakan ring clean.

Definisi 2.6.5 (*Ring Weakly Clean*)
Misalkan R adalah ring. R disebut *ring weakly clean* jika untuk setiap $x \in R$ dapat ditulis $x = u + a$ atau $x = u - a$ dimana $u \in U(R)$ dan $a \in Id(R)$.

Contoh 2.6.6
Diberikan ring komutatif dengan elemen satuan $(\mathbb{Z}_8, +, \cdot)$. Akan dibuktikan $\mathbb{Z}_8$ merupakan ring weakly clean.
Bukti.
Telah diketahui pada Contoh 2.6.2 bahwa $(\mathbb{Z}_8, +, \cdot)$ adalah ring clean, dengan elemen unit di $\mathbb{Z}_8$ adalah $U(\mathbb{Z}_8) = \{\bar{1}, \bar{3}, \bar{5}, \bar{7}\}$ dan elemen idempoten di $\mathbb{Z}_8$ adalah $Id(\mathbb{Z}_8) = \{\bar{0}, \bar{1}\}$. Berdasarkan Definisi 2.6.4 diperoleh

Tabel 2.23 Hasil dari $u - a$ di $\mathbb{Z}_8$

u	a	$x = u - a$
$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{0}$
$\bar{1}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$
$\bar{3}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$
$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{3}$
$\bar{5}$	$\bar{1}$	$\bar{4}$
$\bar{5}$	$\bar{0}$	$\bar{5}$
$\bar{7}$	$\bar{1}$	$\bar{6}$
$\bar{7}$	$\bar{0}$	$\bar{7}$

Berdasarkan Tabel 2.23 diketahui semua elemen di $\mathbb{Z}_8$ merupakan hasil dari selisih elemen idempoten dan unit di $\mathbb{Z}_8$. Jadi terbukti $\mathbb{Z}_8$ adalah ring weakly clean.

BAB III
PEMBAHASAN

Pada bab ini dibahas teorema dan lemma mengenai ring semi Boolean.

3.1 Ring Semi Boolean

Berikut diberikan definisi dan contoh yang berkaitan dengan *ring semi Boolean*, *ring strongly semi Boolean* dan *ring weakly semi Boolean* yang dikutip dari Danchev (2017b).

Definisi 3.1.1 (*Ring Semi Boolean* dan *Ring Strongly Semi Boolean*)
Misalkan $(R,+,\cdot)$ adalah ring. R disebut *semi Boolean* jika untuk setiap $r \in R$ terdapat $j \in J(R)$ dan $a \in Id(R)$ sedemikian sehingga $r = j + a$. Jika kondisi komutatif $ja = aj$ terpenuhi, maka ring semi Boolean di R dikatakan strongly semi Boolean.

Contoh 3.1.2
Diberikan ring $(\mathbb{Z}_4,+,\cdot)$. Akan dibuktikan $\mathbb{Z}_4$ merupakan suatu ring *strongly* semi Boolean
Bukti.
Telah diketahui dari Contoh 2.5.17, $J(\mathbb{Z}_4) = \{\bar{0},\bar{2}\}$ dan dari Contoh 2.4.2, $Id(\mathbb{Z}_4) = \{\bar{0},\bar{1}\}$. Berdasarkan Definisi 3.1.1 diperoleh

Tabel 3.1 Hasil dari $j + a$ dan $ja = aj$ di $\mathbb{Z}_4$

j	a	$r = j + a$	ja	aj
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
$\bar{2}$	$\bar{1}$	$\bar{3}$	$\bar{2}$	$\bar{2}$

Berdasarkan Tabel 3.1, diketahui semua elemen di $\mathbb{Z}_4$ merupakan hasil dari penjumlahan elemen idempoten dan radikal Jacobson di $\mathbb{Z}_4$. Jadi terbukti $\mathbb{Z}_4$ adalah ring semi Boolean. Berdasarkan Tabel 3.1 diketahui bahwa kondisi komutatif $ja = aj$ dipenuhi, sehingga dapat disimpulkan bahwa $\mathbb{Z}_4$ adalah *ring strongly semi Boolean.*

Contoh 3.1.3
Diberikan ring $(\mathbb{Z}_6, +, \cdot)$. Akan dibuktikan $\mathbb{Z}_6$ bukan merupakan ring semi Boolean
Bukti.
Telah diketahui dari Contoh 2.4.4, $Id(\mathbb{Z}_6) = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{3}, \bar{4}\}$ dan $J(\mathbb{Z}_6) = \{\bar{0}\}$. Berdasarkan Definisi 3.1.1 diperoleh

Tabel 3.2 Hasil dari $j + a$ di $\mathbb{Z}_6$

j	a	$r = j + a$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{1}$
$-$	$-$	$\bar{2}$
$\bar{0}$	$\bar{3}$	$\bar{3}$
$\bar{0}$	$\bar{4}$	$\bar{4}$
$-$	$-$	$\bar{5}$

Berdasarkan Tabel 3.2, diketahui hasil dari penjumlahan elemen idempoten dan radikal Jacobson di $\mathbb{Z}_6$ tidak memuat semua elemen di $\mathbb{Z}_6$. Jadi terbukti bahwa $\mathbb{Z}_6$ bukan merupakan ring semi Boolean.

Contoh 3.1.4
Diberikan ring $(\mathbb{Z}_8, +, \cdot)$. Akan dibuktikan $\mathbb{Z}_8$ merupakan ring semi Boolean
Bukti.
Telah diketahui dari Contoh 2.5.18, $J(\mathbb{Z}_8) = \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}, \bar{6}\}$ dan dari Contoh 2.4.5, $Id(\mathbb{Z}_8) = \{\bar{0}, \bar{1}\}$. Berdasarkan Definisi 3.1.1 diperoleh

Tabel 3.3 Hasil dari $j + a$ di $\mathbb{Z}_8$

j	a	$r = j + a$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{1}$
$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$
$\bar{2}$	$\bar{1}$	$\bar{3}$
$\bar{4}$	$\bar{0}$	$\bar{4}$
$\bar{4}$	$\bar{1}$	$\bar{5}$
$\bar{6}$	$\bar{0}$	$\bar{6}$
$\bar{6}$	$\bar{1}$	$\bar{7}$

Berdasarkan Tabel 3.2, diketahui elemen di $\mathbb{Z}_8$ merupakan hasil dari penjumlahan elemen idempoten dan radikal Jacobson di $\mathbb{Z}_8$. Jadi terbukti bahwa $\mathbb{Z}_8$ merupakan ring semi Boolean.

Definisi 3.1.5 (Ring Weakly Semi Boolean)
Misalkan R adalah ring. R disebut *weakly semi Boolean* jika untuk setiap $r \in R$ dapat ditulis sebagai $r = j + a$ atau $r = j - a$ dimana $j \in J(R)$ dan $a \in Id(R)$.

Contoh 3.1.6
Diberikan ring $(\mathbb{Z}_6, +, \cdot)$. Akan dibuktikan $\mathbb{Z}_6$ bukan merupakan ring *weakly semi Boolean*.
Bukti.
Telah diketahui pada Contoh 3.1.3 bahwa $\mathbb{Z}_6$ bukan merupakan ring semi Boolean, sehingga berdasarkan Definisi 3.1.5, terbukti bahwa $\mathbb{Z}_6$ juga bukan merupakan ring weakly semi Boolean.

Contoh 3.1.7
Diberikan ring $(\mathbb{Z}_8, +, \cdot)$. Akan dibuktikan $\mathbb{Z}_8$ merupakan ring *weakly semi Boolean*.
Bukti.
Telah diketahui pada Contoh 3.1.4 bahwa $\mathbb{Z}_8$ adalah ring semi Boolean, dengan radikal Jacobson di $\mathbb{Z}_8$ adalah $J(\mathbb{Z}_8) = \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}, \bar{6}\}$ dan elemen idempoten di $\mathbb{Z}_8$ adalah $Id(\mathbb{Z}_8) = \{\bar{0}, \bar{1}\}$. Berdasarkan Definisi 3.1.5 diperoleh

Tabel 3.4 Hasil dari $j - a$ di $\mathbb{Z}_8$

j	a	$r = j - a$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
$\bar{2}$	$\bar{1}$	$\bar{1}$
$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$
$\bar{4}$	$\bar{1}$	$\bar{3}$
$\bar{4}$	$\bar{0}$	$\bar{4}$
$\bar{6}$	$\bar{1}$	$\bar{5}$
$\bar{6}$	$\bar{0}$	$\bar{6}$
$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{7}$

Berdasarkan Tabel 3.3 diketahui semua elemen di $\mathbb{Z}_8$ merupakan hasil dari selisih radikal Jacobson dan elemen idempoten di $\mathbb{Z}_8$. Jadi terbukti $\mathbb{Z}_8$ adalah ring weakly semi Boolean.

Contoh 3.1.8
Misalkan R adalah ring. $a \in Id(R)$. Akan dibuktikan
$aRa = \{ara | r \in R\}$ merupakan ring.
Bukti.
Ambil $x, y, z \in aRa$.
$x = ar_1a,$ $y = ar_2a,$ $z = ar_3a.$ $r_1, r_2, r_3 \in R.$
Akan dibuktikan aRa merupakan ring.

I. $(aRa, +)$ grup komutatif
   i. Tertutup
   $$x + y = ar_1a + ar_2a$$
   $$= a(r_1a + r_2a) = a(r_1 + r_2)a \in aRa$$
   ii. Assosiatif
   $$(x + y) + z = (ar_1a + ar_2a) + ar_3a$$
   $$= \big(a(r_1a + r_2a)\big) + ar_3a$$
   $$= (a(r_1 + r_2)a) + a_3a$$
   $$= a((r_1 + r_2)a + r_3a)$$
   $$= a\big((r_1 + r_2) + r_3\big)a$$
   $$= a(r_1 + (r_2 + r_3))a$$
   $$= a(r_1a + (r_2 + r_3)a)$$
   $$= ar_1a + (a(r_2 + r_3)a)$$
   $$= ar_1a + ((ar_2 + ar_3)a)$$
   $$= ar_1a + (ar_2a + ar_3a) = x + (y + z)$$
   iii. Mempunyai elemen netral
   Elemen netral di R adalah $0 = a0a \in aRa.$
   Akan ditunjukkan bahwa $0 = a0a$ merupakan elemen netral terhadap penjumlahan.
   $$x + 0 = ar_1a + a0a \qquad 0 + x = a0a + ar_1a$$
   $$= a(r_1a + 0a) \qquad = a(0a + r_1a)$$
   $$= a(r_1 + 0)a \qquad = a(0 + r_1)a$$
   $$= ar_1a = x \qquad = ar_1a = x$$
   iv. Setiap elemen mempunyai invers
   Misalkan p adalah invers dari x sedemikian sehingga berlaku
   $x + p = p + x = 0$

$$x + p = 0$$
$$ar_1a + p = a0a$$
$$a(-r_1)a + ar_1a + p = a(-r_1)a + a0a$$
$$a\big((-r_1)a + r_1a\big) + p = a((-r_1)a + 0a)$$
$$a\big((-r_1) + r_1\big)a + p = a\big((-r_1) + 0\big)a$$
$$a0a + p = a(-r_1)a$$
$$0 + p = a(-r_1)a$$
$$p = a(-r_1)a$$

Invers dari $x = ar_1a$ adalah $p = a(-r_1)a$.

v. Komutatif

$$\begin{aligned} x + y &= ar_1a + ar_2a \\ &= a(r_1a + r_2a) \\ &= a(r_1 + r_2)a \\ &= a(r_2 + r_1)a \\ &= a(r_2a + r_1a) \\ &= ar_2a + ar_1a = y + x \end{aligned}$$

Kesimpulan $(aRa, +)$ merupakan grup komutatif.

II. $(aRa,\cdot)$ semigrup

i. Tertutup

$$\begin{aligned} x \cdot y &= (ar_1a)(ar_2a) \\ &= ar_1(a \cdot a)r_2a \\ &= ar_1ar_2a \end{aligned}$$

Jika $a \in Id(R)$, maka $a \in R$, sehingga $r_1ar_2 \in R$. Terbukti $(aRa,\cdot)$ tertutup.

ii. Assosiatif

$$\begin{aligned} (x \cdot y) \cdot z &= ((ar_1a)(a_2a))(ar_3a) \\ &= (ar_1a \cdot ar_2a)(ar_3a) \\ &= ar_1a((ar_2a)(ar_3a)) = x \cdot (y \cdot z) \end{aligned}$$

Untuk setiap $a \in Id(R)$ sehingga $a \in R$ dan $r_1, r_2, r_3 \in R$, maka berlaku hukum assositif terhadap operasi pergandaan.

III. Berlaku hukum distributif

$$\begin{aligned} (x + y)z &= (ar_1a + ar_2a)ar_3a \\ &= \big(a(r_1a + r_2a)\big)ar_3a \\ &= (a(r_1 + r_2)a)ar_3a \\ &= \big(a(r_1 + r_2)\big)(a \cdot a)r_3a \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \big(a(r_1 + r_2)\big)a^2 r_3 a \\
&= \big(a(r_1 + r_2)\big)ar_3 a \\
&= a(r_1 ar_3 a + r_2 ar_3 a) \\
&= ar_1 ar_3 a + ar_2 ar_3 a \\
&= ar_1 a^2 r_3 a + ar_2 a^2 r_3 a \\
&= (ar_1 a)(ar_3 a) + (ar_2 a)(ar_3 a)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
x(y+z) &= ar_1 a(ar_2 a + ar_3 a) \\
&= ar_1 a(a(r_2 a + r_3 a)) \\
&= ar_1 a(a(r_2 + r_3)a) \\
&= ar_1 (a \cdot a)((r_2 + r_3)a) \\
&= ar_1 a^2((r_2 + r_3)a) \\
&= ar_1 a((r_2 + r_3)a) \\
&= (ar_1 ar_2 + ar_1 ar_3)a \\
&= ar_1 ar_2 a + ar_1 ar_3 a \\
&= ar_1 a^2 r_2 a + ar_1 a^2 r_3 a \\
&= (ar_1 a)(ar_2 a) + (ar_1 a)(ar_3 a)
\end{aligned}
$$

Terbukti bahwa aRa merupakan ring.

Definisi 3.1.9 (*Ring Corner*)
Misalkan R adalah ring. $Id(R)$ adalah elemen idempoten di R. aRa disebut ring corner jika terdapat $a \in Id(R)$. Dapat ditulis dalam bentuk

$$aRa = \{ara | r \in R\}$$

Contoh 3.1.10
Diberikan ring $(\mathbb{Z}_8, +, \cdot)$. Akan ditunjukkan bahwa $\mathbb{Z}_8$ merupakan ring corner.
Bukti.
Berdasarkan Contoh 2.4.5 diketahui bahwa $Id(\mathbb{Z}_8) = \{\bar{0}, \bar{1}\}$, sehingga diperoleh
$\bar{0}\mathbb{Z}_8\bar{0} = \{\bar{0}\}$
$\bar{1}\mathbb{Z}_8\bar{1} = \mathbb{Z}_8$
Jadi, ring corner dari $\mathbb{Z}_8$ adalah $\{\bar{0}\}$ dan $\mathbb{Z}_{12}$.

Contoh 3.1.11
Diberikan ring $(\mathbb{Z}_5, +, \cdot)$. Akan ditunjukkan bahwa $\mathbb{Z}_5$ merupakan ring corner.

Bukti.
Berdasarkan Contoh 2.4.3 diketahui bahwa $Id(\mathbb{Z}_5) = \{\bar{0}, \bar{1}\}$,sehingga diperoleh
$\bar{0}\mathbb{Z}_5\bar{0} = \{\bar{0}\}$
$\bar{1}\mathbb{Z}_5\bar{1} = \mathbb{Z}_5$
Jadi, ring corner dari $\mathbb{Z}_5$ adalah $\{\bar{0}\}$ dan $\mathbb{Z}_5$.

Contoh 3.1.12
Diberikan ring $(\mathbb{Z}, +,\cdot)$. Akan ditunjukkan bahwa $\mathbb{Z}$ merupakan ring corner.
Bukti.
Elemen idempoten di $\mathbb{Z}$ adalah $Id(\mathbb{Z}) = \{\bar{0}, \bar{1}\}$,sehingga diperoleh
$\bar{0}\mathbb{Z}\bar{0} = \{\bar{0}\}$
$\bar{1}\mathbb{Z}\bar{1} = \mathbb{Z}$
Jadi, ring corner dari $\mathbb{Z}$ adalah $\{\bar{0}\}$ dan $\mathbb{Z}$.

3.2 Ring Nil Clean

Berikut diberikan definisi dan contoh mengenai *ring nil clean* dan *ring strongly nil clean* yang dikutip dari Danchev (2017b), serta *ring weakly nil clean* yang dikutip dari Danchev dan Govern (2015).

Definisi 3.2.1 (*Ring Nil Clean* dan *Ring Strongly Nil clean*)
Misalkan R adalah ring. R disebut *nil clean* jika untuk setiap $r \in R$ terdapat $q \in Nil(R)$ dan $a \in Id(R)$ sedemikian sehingga $r = q + a$. Jika kondisi komutatif $qa = aq$ terpenuhi, maka *ring nil clean* R dikatakan strongly *nil clean*.

Contoh 3.2.2
Diberikan ring $(\mathbb{Z}_4, +,\cdot)$. Akan dibuktikan $\mathbb{Z}_4$ merupakan ring *strongly* nil clean.
Bukti.
Telah diketahui dari Contoh 2.4.14, diketahui bahwa
$Nil(\mathbb{Z}_4) = \{\bar{0}, \bar{2}\}$ dan dari Contoh 2.4.2, $Id(\mathbb{Z}_4) = \{\bar{0}, \bar{1}\}$.
Berdasarkan Definisi 3.2.1 diperoleh

Tabel 3.5 Hasil dari $q + a$ dan $qa = aq$ di $\mathbb{Z}_4$

q	a	$r = q + a$	qa	aq
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
$\bar{2}$	$\bar{1}$	$\bar{3}$	$\bar{2}$	$\bar{2}$

Berdasarkan Tabel 3.5 diketahui semua elemen di $\mathbb{Z}_4$ merupakan hasil dari penjumlahan elemen nilpoten dan elemen idempoten di $\mathbb{Z}_4$. Jadi terbukti $\mathbb{Z}_4$ adalah ring nil clean. Berdasarkan Tabel 3.5 diketahui bahwa kondisi komutatif $qa = aq$ dipenuhi, sehingga dapat disimpulkan bahwa $\mathbb{Z}_4$ adalah *ring strongly nil clean.*

Contoh 3.2.3
Diberikan ring $(\mathbb{Z}_8, +, \cdot)$. Akan dibuktikan $\mathbb{Z}_8$ ring *nil clean*.
Bukti.
Dibuktikan bahwa untuk setiap $r \in \mathbb{Z}_8$ dapat ditulis sebagai $r = q + a$ dimana $q \in Nil(\mathbb{Z}_8)$ dan $a \in Id(\mathbb{Z}_8)$. Telah diketahui pada Contoh 2.4.15, $Nil(\mathbb{Z}_8) = \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}, \bar{6}\}$ dan pada Contoh 2.4.5 $Id(\mathbb{Z}_8) = \{\bar{0}, \bar{1}\}$.

Tabel 3.6 Hasil dari $q + a$ di $\mathbb{Z}_8$

q	a	$r = q + a$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{1}$
$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$
$\bar{2}$	$\bar{1}$	$\bar{3}$
$\bar{4}$	$\bar{0}$	$\bar{4}$
$\bar{4}$	$\bar{1}$	$\bar{5}$
$\bar{6}$	$\bar{0}$	$\bar{6}$
$\bar{6}$	$\bar{1}$	$\bar{7}$

Berdasarkan Tabel 3.6 diketahui semua elemen di $\mathbb{Z}_8$ merupakan hasil dari penjumlahan elemen nilpotent dan idempoten di $\mathbb{Z}_8$. Jadi terbukti $\mathbb{Z}_8$ adalah ring nil clean.

Contoh 3.2.4
Diberikan $\mathcal{P}(\mathbb{Z})$ berdasarkan Contoh 2.3.4 adalah ring. Akan dibuktikan $\mathcal{P}(\mathbb{Z})$ merupakan ring nil clean.

Bukti.
Akan dibuktikan bahwa untuk setiap $A \in \mathcal{P}(\mathbb{Z})$ dapat ditulis sebagai jumlahan dari elemen nilpoten dan elemen idempoten di $\mathcal{P}(\mathbb{Z})$. Berdasarkan Contoh 2.3.11, $\mathcal{P}(\mathbb{Z})$ adalah ring Boolean, sehingga untuk setiap $A \in \mathcal{P}(\mathbb{Z})$ juga merupakan elemen idempoten. Telah diketahui pada Contoh 2.4.17 bahwa $Nil\big(\mathcal{P}(\mathbb{Z})\big) = \{\emptyset\}$, sehingga

$$\begin{aligned} A = A + \emptyset &= (A \cup \emptyset) - (A \cap \emptyset) \\ &= A - \emptyset = A \end{aligned}$$

Jadi, terbukti bahwa $\mathcal{P}(\mathbb{Z})$ merupakan ring nil clean.

Definisi 3.2.5 (Ring *Weakly Nil Clean*)
Misalkan R adalah ring. R disebut *ring* weakly *nil clean* jika untuk setiap $r \in R$ dapat ditulis sebagai $r = q + a$ atau $r = q - a$ dimana $q \in Nil(R)$ dan $a \in Id(R)$.

Contoh 3.2.6
Diberikan ring $(\mathbb{Z}_8, +, \cdot)$. Akan dibuktikan $\mathbb{Z}_8$ merupakan *ring weakly nil clean*.
Bukti.
Telah diketahui pada Contoh 3.2.3 bahwa $(\mathbb{Z}_8, +, \cdot)$ adalah *ring nil clean*, dengan $Nil(\mathbb{Z}_8) = \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}, \bar{6}\}$ dan $Id(\mathbb{Z}_8) = \{\bar{0}, \bar{1}\}$

Tabel 3.7 Hasil dari $q - a$ di $\mathbb{Z}_8$

q	a	$r = q - a$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
$\bar{2}$	$\bar{1}$	$\bar{1}$
$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$
$\bar{4}$	$\bar{1}$	$\bar{3}$
$\bar{4}$	$\bar{0}$	$\bar{4}$
$\bar{6}$	$\bar{1}$	$\bar{5}$
$\bar{6}$	$\bar{0}$	$\bar{6}$
$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{7}$

Berdasarkan Tabel 3.7 diketahui semua elemen di $\mathbb{Z}_8$ merupakan hasil selisih dari elemen nilpotent dan idempoten di $\mathbb{Z}_8$, dan pada Tabel 3.7 diketahui semua elemen di $\mathbb{Z}_8$ merupakan hasil dari jumlahan elemen nilpoten dan idempoten di $\mathbb{Z}_8$. Jadi terbukti $\mathbb{Z}_8$ adalah *ring weakly nil clean*.

3.3 Sifat-Sifat Ring Corner Semi Boolean

Berikut diberikan lemma yang berkaitan dengan sifat-sifat ring corner semi Boolean yang dikutip dari paper yang berjudul *Semi Boolean Corner Ring* oleh Danchev (2017b).

Lemma 3.3.1
Jika R adalah ring dengan $a \in Id(R)$ serta aRa dan $(1-a)R(1-a)$ adalah ring Boolean, maka R adalah ring *nil clean*.
Bukti.
Untuk setiap $r \in R,$ berlaku persamaan
$$r = ara + (1-a)r(1-a) + (1-a)ra + ar(1-a)$$
Perhatikan bahwa $ara \in aRa$ dan
$$(1-a)r(1-a) \in (1-a)R(1-a)$$
Kedua persamaan merupakan idempoten orthogonal, sedangkan $(1-a)ra$ dan $ar(1-a)$ merupakan elemen nilpoten dari orde 2, karena
$$[(1-a)ra]^2 = (1-a)ra$$
$$(1-a)ra = 0 = ar(1-a)$$
$$ar(1-a) = [ar(1-a)]^2$$
Ambil
$$t = (1-a)ra + ar(1-a)$$
dan
$$f = (1-a)rar(1-a) + ar(1-a)ra$$
terlihat bahwa $t^2 = f$.
Berdasarkan kedua asumsi
$$(1-a)rar(1-a) \in (1-a)R(1-a)$$
dan
$$ar(1-a)ra \in aRa$$
adalah elemen idempoten, sehingga f juga merupakan elemen idempoten yang menjadi penjumlahan dari dua elemen idempoten orthogonal, sehingga $t^2 = f^2$ atau $t^2 - f^2 = 0$.
$$tf = (1-a)rar(1-a)ra + ar(1-a)rar(1-a) = ft$$
Jadi, $(t-f)(t+f) = 0$.
Mengingat bahwa $2f = 0$, karena f adalah elemen yang berasal dari penjumlahan dua ring Boolean, yaitu
$$(1-a)rar(1-a)$$
dan
$$ar(1-a)ra$$

persamaan $(t-f)(t+f)=0$ ekivalen untuk $(t-f)^2=0$, $t \in f+Nil(R)$. Perhatikan bahwa

$$r=[ara+ar(1-a)ra] + [(1-a)r(1-a)+(1-a)rar(1-a)]+q,$$

dimana $q \in Nil(R)$.

$$a_1=ara+ar(1-a)ra=a(r+r(1-a)r)a \in aRa$$

dan

$$a_2=(1-a)r(1-a)+(1-a)rar(1-a) = (1-a)(r+rar)(1-a) \in (1-a)R(1-a)$$

adalah elemen idempotent dengan *zero product* $a_1.a_2=a_2.a_1=0$, sehingga dapat disimpulkan bahwa $a_1+a_2=a'$ adalah elemen idempoten.

$$r=a'+q$$

dengan $a' \in Id(R)$ dan $q \in Nil(R)$, terbukti bahwa R adalah nil clean.

Contoh 3.3.2

Diberikan ring $\mathbb{Z}_2$ dengan $a \in Id(\mathbb{Z}_2)$ serta $a\mathbb{Z}_2a$ dan $(1-a)\mathbb{Z}_2(1-a)$ adalah ring Boolean. Akan dibuktikan $\mathbb{Z}_2$ adalah ring nil clean.

Bukti.

Berdasarkan Definisi 2.4.1, elemen idempoten di $\mathbb{Z}_2$ adalah $Id(\mathbb{Z}_2)=\{\bar{0},\bar{1}\}$.

i. Akan dibuktikan $a\mathbb{Z}_2a$ ring Boolean.

Tabel 3.8 Hasil Kuadrat di $a\mathbb{Z}_2a$

a	$\mathbb{Z}_2$	a	$a\mathbb{Z}_2a$	$(a\mathbb{Z}_2a)^2$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
	$\bar{1}$		$\bar{0}$	$\bar{0}$
$\bar{1}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
	$\bar{1}$		$\bar{1}$	$\bar{1}$

Berdasarkan Tabel 3.8, terlihat bahwa $(a\mathbb{Z}_2a)^2=a\mathbb{Z}_2a$. Menurut Definisi 2.3.9, terbukti bahwa $a\mathbb{Z}_2a$ ring Boolean.

ii. Akan dibuktikan $(1-a)\mathbb{Z}_2(1-a)$ ring Boolean.

Tabel 3.9 Hasil Kuadrat di $(1-a)\mathbb{Z}_2(1-a)$

$1-a$	$\mathbb{Z}_2$	$1-a$	$(1-a)\mathbb{Z}_2(1-a)$	$((1-a)\mathbb{Z}_2(1-a))^2$
$\bar{1}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
	$\bar{1}$		$\bar{1}$	$\bar{1}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
	$\bar{1}$		$\bar{0}$	$\bar{0}$

Berdasarkan Tabel 3.9, terlihat bahwa $(1-a)\mathbb{Z}_2(1-a)^2 = (1-a)\mathbb{Z}_2(1-a)$. Menurut Definisi 2.3.9, terbukti bahwa $(1-a)\mathbb{Z}_2(1-a)$ ring Boolean.

Telah diketahui dari i dan ii bahwa $a\mathbb{Z}_2a$ dan $(1-a)\mathbb{Z}_2(1-a)$ adalah ring Boolean. Berdasarkan Lemma 3.3.1, terbukti bahwa $\mathbb{Z}_2$ adalah ring nil clean.

Teorema 3.3.3

Jika R adalah ring dengan $a \in Id(R)$ serta aRa dan $(1-a)R(1-a)$ adalah ring semi-Boolean, maka $R/J(R)$ adalah ring nil-clean.

Bukti.

Untuk setiap $h \in Id(R)$ disimpulkan bahwa ring faktor dari $hRh/J(hRh)$, dapat ditulis

$$\begin{aligned} hRh/J(hRh) &= hRh/hJ(R)h \\ &\cong h'(R/J(R))h' \end{aligned}$$

adalah ring Boolean dari suatu elemen idempoten dimana $h' = h + J(R)$ atau $R/J(R)$. Berdasarkan Lemma 3.3.1, terbukti bahwa $R/J(R)$ adalah nil clean.

Contoh 3.3.4

Diberikan ring $\mathbb{Z}_4$ dengan $a \in Id(\mathbb{Z}_4)$ serta $a\mathbb{Z}_4a$ dan $(1-a)\mathbb{Z}_4(1-a)$ adalah ring semi Boolean. Akan dibuktikan $\mathbb{Z}_4/J(\mathbb{Z}_4)$ adalah ring nil clean.

Bukti.

Ambil $a \in Id(\mathbb{Z}_4)$. Berdasarkan Contoh 2.4.2, diketahui bahwa $Id(\mathbb{Z}_4) = \{\bar{0}, \bar{1}\}$, sehingga

Tabel 3.10 Hasil dari $a\mathbb{Z}_4a$ dan $(1-a)\mathbb{Z}_4(1-a)$

a	$1-a$	$\mathbb{Z}_4$	$a\mathbb{Z}_4a$	$(1-a)\mathbb{Z}_4(1-a)$
$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$
$\overline{1}$	$\overline{0}$		$\overline{0}$	$\overline{0}$
$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{1}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$
$\overline{1}$	$\overline{0}$		$\overline{1}$	$\overline{0}$
$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{0}$	$\overline{2}$
$\overline{1}$	$\overline{0}$		$\overline{2}$	$\overline{0}$
$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{3}$	$\overline{0}$	$\overline{3}$
$\overline{1}$	$\overline{0}$		$\overline{3}$	$\overline{0}$

Berdasarkan Tabel 3.10, diketahui semua elemen di $\mathbb{Z}_4$ merupakan hasil dari perkalian $a\mathbb{Z}_4a$ dan $(1-a)\mathbb{Z}_4(1-a)$, sehingga untuk membuktikan bahwa $a\mathbb{Z}_4a$ dan $(1-a)\mathbb{Z}_4(1-a)$ ring semi Boolean, cukup dengan membuktikan bahwa $\mathbb{Z}_4$ ring semi Boolean. Telah dibuktikan pada Contoh 3.1.2 bahwa $\mathbb{Z}_4$ ring semi Boolean, sehingga berdasarkan Teorema 3.3.3 terbukti bahwa $\mathbb{Z}4\,/J(\mathbb{Z}_4)$ adalah ring nil clean.

Lemma 3.3.5

Untuk setiap ring R dan masing-masing idempoten a, berlaku persamaan

$$P(aRa) = aP(R)a$$

Bukti.

Perhatikan bahwa jika P adalah ideal prima dari R, maka $aPa = aRa$ atau aPa adalah ideal prima dari aRa. $aP(R)a$ adalah perpotongan dari beberapa ideal prima dari aRa, sehingga perpotongan ideal prima disebut ideal semiprima dari aRa dan dapat ditulis $P(aRa) \subseteq aP(R)a$. Untuk menunjukkan bahwa pernyataan sebaliknya valid, cukup dengan membuktikan bahwa $aP(R)a \subseteq Q$ untuk setiap ideal prima Q dari aRa. Akan dibuktikan bahwa $Q = aPa$ untuk suatu ideal prima P dari R. Perhatikan bahwa $X = aRa \setminus Q$ adalah adalah tidak kosong, dan untuk setiap $x, y \in X$, terdapat suatu $u \in aRa$ sedemikian sehingga $xuy \in X$. Perhatikan bahwa X adalah disjoin dari ideal RQR. Diberikan $P \supseteq RQR$ ideal dari R yang maksimal dengan masing-masing disjoin dari X. P

adalah disjoin dari $X,$ maka $p \cap aRa = Q$ dan mengakibatkan $aPa = Q.$

Contoh 3.3.6
Diberikan ring $\mathbb{Z}_8$ dengan $a \in Id(\mathbb{Z}_8)$. Akan dibuktikan bahwa $P(a\mathbb{Z}_8 a) = aP(\mathbb{Z}_8)a$
Bukti.
Telah diketahui dari Contoh 3.1.10 bahwa semua elemen di $a\mathbb{Z}_8 a$ merupakan anggota elemen di $\mathbb{Z}_8$, sehingga

$$P(a\mathbb{Z}_8 a) = P(\mathbb{Z}_8).$$

Akan dibuktikan bahwa $P(\mathbb{Z}_8) = aP(\mathbb{Z}_8)a$. Berdasarkan Contoh 2.5.14, diketahui bahwa $P(\mathbb{Z}_8) = \{\overline{0}, \overline{2}, \overline{4}, \overline{6}\}$ dan pada Contoh 2.4.5, diketahui bahwa $Id(\mathbb{Z}_8) = \{\overline{0}, \overline{1}\}$, sehingga
$a \cdot P(\mathbb{Z}_8) \cdot a = aP(\mathbb{Z}_8)a$

$$\begin{aligned}
\overline{0} \cdot \overline{0} \cdot \overline{0} &= \overline{0} \\
\overline{1} \cdot \overline{0} \cdot \overline{1} &= \overline{0} \\
\overline{0} \cdot \overline{2} \cdot \overline{0} &= \overline{0} \\
\overline{1} \cdot \overline{2} \cdot \overline{1} &= \overline{2} \\
\overline{0} \cdot \overline{4} \cdot \overline{0} &= \overline{0} \\
\overline{1} \cdot \overline{4} \cdot \overline{1} &= \overline{4} \\
\overline{0} \cdot \overline{6} \cdot \overline{0} &= \overline{0} \\
\overline{1} \cdot \overline{6} \cdot \overline{1} &= \overline{6}
\end{aligned}$$

Jadi, terbukti bahwa $P(\mathbb{Z}_8) = aP(\mathbb{Z}_8)a$, sehingga dapat disimpulkan bahwa

$$\begin{aligned}
P(a\mathbb{Z}_8 a) &= P(\mathbb{Z}_8) \\
&= aP(\mathbb{Z}_8)a.
\end{aligned}$$

Akibat 3.3.7
Jika R adalah ring J-primal, maka ring *corner* aRa merupakan ring J-primal untuk setiap a merupakan anggota elemen idempoten di R.
Bukti.
Berdasarkan Lemma 3.3.5, diketahui bahwa

$$J(aRa) = aJ(R)a$$

Berdasarkan Definisi 2.5.26, diperoleh

$$\begin{aligned}
aJ(R)a &= aP(R)a \\
&= P(aRa)
\end{aligned}$$

Jadi, terbukti bahwa untuk setiap elemen idempoten a dari ring *corner* aRa adalah ring J-primal.

Contoh 3.3.8
Diberikan $\mathbb{Z}_{12}$ berdasarkan Contoh 2.5.28 adalah ring J-primal, maka ring corner $a\mathbb{Z}_{12}a$ adalah ring J-primal untuk setiap a merupakan anggota elemen idempoten di $\mathbb{Z}_{12}$.

Teorema 3.3.9
Jika R adalah ring dengan $a \in Id(R)$ serta aRa dan $(1-a)R(1-a)$ keduanya ring semi-Boolean J-primal, maka R adalah *ring nil clean*.
Bukti.
Telah diketahui bahwa untuk f diantara dari a atau $1-a$, berdasarkan Definisi 2.5.26 berlaku $J(fRf) = P(fRf)$. Berdasarkan Lemma 3.3.5 diperoleh

$$\begin{aligned} fRf/J(fRf) &= \ fRf/P(fRf) \\ &= fRf/fP(R)f \\ &\cong f'(R/P(R))\, f' \end{aligned}$$

untuk $f' = f + P(R) \in Id(R/P(R))$ adalah ring Boolean. Berdasarkan Lemma 3.3.1 terbukti bahwa $R/P(R)$ adalah nil clean. $P(R)$ adalah ideal nil dari R, sehingga dapat disimpulkan R adalah nil clean.

Contoh 3.3.10
Diberikan ring $\mathbb{Z}_8$ dengan $a \in Id(\mathbb{Z}_8)$ serta $a\mathbb{Z}_8a$ dan $(1-a)\mathbb{Z}_8(1-a)$ keduanya ring semi Boolean J-primal. Akan dibuktikan $\mathbb{Z}_8$ adalah ring nil clean.
Bukti.

i. Akan dibuktikan bahwa $a\mathbb{Z}_8a$ adalah ring semi Boolean J-primal. Berdasarkan Contoh 3.1.10, diketahui bahwa $a\mathbb{Z}_8a$ adalah ring corner, sehingga semua elemen di $a\mathbb{Z}_8a$ sama dengan elemen di $\mathbb{Z}_8$. Telah diketahui dari Contoh 2.5.27 bahwa $\mathbb{Z}_8$ merupakan ring J-primal dan pada Contoh 3.1.4, diketahui bahwa $\mathbb{Z}_8$ merupakan ring semi Boolean, sehingga terbukti bahwa $\mathbb{Z}_8$ merupakan ring semi Boolean J-primal

ii. Akan dibuktikan bahwa $(1-a)\mathbb{Z}_8(1-a)$ adalah ring semi Boolean J-primal. Ambil $a \in Id(\mathbb{Z}_8)$. Berdasarkan Contoh 2.4.5, diketahui bahwa $Id(\mathbb{Z}_8) = \{\bar{0}, \bar{1}\}$, sehingga

Tabel 3.11 Hasil dari $(1-a)\mathbb{Z}_8(1-a)$

a	$1-a$	$\mathbb{Z}_8$	$(1-a)\mathbb{Z}_8(1-a)$
$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
$\bar{1}$	$\bar{0}$		$\bar{0}$
$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{1}$
$\bar{1}$	$\bar{0}$		$\bar{0}$
$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{2}$
$\bar{1}$	$\bar{0}$		$\bar{0}$
$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{3}$	$\bar{3}$
$\bar{1}$	$\bar{0}$		$\bar{0}$
$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{4}$	$\bar{4}$
$\bar{1}$	$\bar{0}$		$\bar{0}$
$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{5}$	$\bar{5}$
$\bar{1}$	$\bar{0}$		$\bar{0}$
$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{6}$	$\bar{6}$
$\bar{1}$	$\bar{0}$		$\bar{0}$
$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{7}$	$\bar{7}$
$\bar{1}$	$\bar{0}$		$\bar{0}$

Berdasarakan Tabel 3.13, diketahui semua elemen di $\mathbb{Z}_8$ merupakan hasil perkalian dari $(1-a)\mathbb{Z}_8(1-a)$, sehingga untuk membuktikan bahwa $(1-a)\mathbb{Z}_8(1-a)$ adalah ring semi Boolean J-primal, cukup dengan membuktikan bahwa $\mathbb{Z}_8$ ring semi Boolean.

Dari i dan ii, dapat disimpulkan bahwa $a\mathbb{Z}_8a$ dan $(1-a)\mathbb{Z}_8(1-a)$ keduanya ring semi Boolean J-primal. Berdasarkan Teorema 3.3.9, terbukti bahwa $\mathbb{Z}_8$ adalah ring nil clean

Akibat 3.3.11

Jika R adalah ring *corner* J-primal dengan $a \in Id(R)$ serta aRa dan $(1-a)\ R(1-a)$ adalah ring semi-Boolean, maka R adalah *ring nil-clean*.

Bukti.

Telah dibuktikan pada Lemma 3.3.5, bahwa

$$J(aRa) = P(aRa)$$

Berdasarkan Definisi 2.5.26, diperoleh kesimpulan bahwa R adalah ring corner J-primal. Telah dibuktikan pada Akibat 3.3.7 bahwa

$J(fRf) = P(fRf)$ dengan f adalah a atau $1 - a$ dan R adalah ring, sehingga berdasarkan Lemma 3.3.5 diperoleh

$$fRf/J(fRf) = fRf/P(fRf) = fRf/fP(R)f \cong f'(R/P(R))\, f'$$

untuk $f' = f + P(R) \in Id(R/P(R))$ adalah ring Boolean.

Berdasarkan Lemma 3.3.1 terbukti bahwa $R/P(R)$ adalah nil clean. $P(R)$ adalah ideal nil dari R, sehingga dapat disimpulkan R ring nil clean.

Contoh 3.3.12

Diberikan ring corner J-primal $\mathbb{Z}_8$ dengan $a \in Id(\mathbb{Z}_8)$ serta $a\mathbb{Z}_8 a$ dan $(1 - a)\mathbb{Z}_8(1 - a)$ adalah ring semi Boolean. Akan dibuktikan $\mathbb{Z}_8$ adalah ring nil clean.

Bukti.

Telah diketahui dari Contoh 3.1.10 bahwa $\mathbb{Z}_8$ adalah ring corner dan telah diketahui dari Contoh 2.5.27 bahwa $\mathbb{Z}_8$ adalah ring J-primal. Berdasarkan Akibat 3.3.7, $\mathbb{Z}_8$ ring corner J-primal. $\mathbb{Z}_8$ ring corner, maka semua elemen di $\mathbb{Z}_8$ merupakan hasil dari perkalian $a\mathbb{Z}_8 a$ dan berdasarkan Tabel 3.14, diketahui bahwa semua elemen di $\mathbb{Z}_8$ merupakan hasil dari $(1 - a)\mathbb{Z}_8(1 - a)$, sehingga untuk membuktikan bahwa $a\mathbb{Z}_8 a$ dan $(1 - a)\mathbb{Z}_8(1 - a)$ adalah ring semi Boolean cukup dengan membuktikan bahwa $\mathbb{Z}_8$ adalah ring semi Boolean. Telah dibuktikan pada Contoh 3.1.4 bahwa $\mathbb{Z}_8$ ring semi Boolean, sehingga berdasrakan Akibat 3.3.11 terbukti bahwa R adalah ring nil clean.

BAB IV
PENUTUP

4.1 Kesimpulan

Berdasarkan pembahasan yang telah disampaikan di bab sebelumnya, terdapat beberapa sifat-sifat dari ring corner semi Boolean yaitu:

1. Jika R adalah ring dengan $a \in Id(R)$ serta aRa dan $(1-a)R(1-a)$ adalah ring Boolean, maka R dan $R/J(R)$ adalah ring *nil clean*.
2. Jika R adalah ring dengan $a \in Id(R)$ serta aRa dan $(1-a)R(1-a)$ adalah ring semi-Boolean J-primal, maka R adalah ring nil clean
3. Jika R adalah ring J-primal, maka untuk setiap elemen idempoten a dari ring *corner* aRa adalah ring J-primal.
4. Jika R adalah ring corner J-primal dengan aRa dan $(1-a)\ R(1-a)$ adalah ring semi-Boolean, maka R adalah ring nil-clean.

1.2 Saran

Pada skripsi ini telah dibahas definisi ring semi Boolean, ring nil clean, ring corner, dan sifat-sifat ring corner semi Boolean, tetapi penulis tidak membahas hubungan antara ring corner Boolean dengan ring corner semi Boolean. Untuk penelitian selanjutnya, penulis menyarankan untuk mengkaji hubungan antara ring corner Boolean dengan ring corner semi Boolean

DAFTAR PUSTAKA

Akbari, S., Habibi, M., Majidinya, A., dan Manaviyat, R. 2013. On The Idempotent Graph Of A Ring. *Journal Of Algebra And Its Applications*. Vol 6, 1350003.

Andari, A. 2014. *Ring, Field, dan Daerah Integral*. Unversitas Brawijaya Press. Malang.

Andari, A. 2015. *Teori Grup*. Universitas Brawijaya Press. Malang.

Bhattacharya, P. B, Jain, S. K., dan Nagpaul, S. R. 1986. *Basic Abstract Algebra*. Cambridge University Press. Amerika.

Brungs, H. H., dan Torner, G. 1997. Ideal Theory of Right Cones and Associated Rings. *Journal Of Algebra*. Vol 210, 145-164.

Danchev, P., Govern, W. Wm. Mc. 2015. Commutative Weakly Nil clean Unital Rings. *Journal Of Algebra*. 410-422.

Danchev, P. 2017a. Feebly J-Clean Unital Rings. *International Journal Of Algebra*. Vol 6, 287-290.

Danchev, P. 2017b. Semi-Boolean Corner Rings. *International Mathematical Forum*. Vol. 16, 795-802.

Danchev, P dan Karamzadeh, O. A. S. 2017. Strongly Nil Clean Corner Rings. *Bull Iranian Math Soc*. Vol 43, 1333-1339.

Diesl, A. J. 2013. Nil Clean Rings. *Journal Of Algebra*. Vol 32, 357-364.

Jabbar, A. K., dan Ahmed, C. A. 2011. On Almost Primary Ideals. *International Journal Of Algebra*. Vol 13, 627-636.

Kosan, T., Wang, Z., dan Zhou, Y. 2016. Nil-Clean And Strongly Nil-Clean Rings. *Journal Of Pure And Applied Algebra*. Vol 220, 633-646.

Kwak, T. K., Lee, Y., Piao, Z., dan Seo, Y. J., 2018. Symmetric Ring Property On Nil Ideals. *Journal Of Algebra And Its Applications*. Vol 11, 1850013.

Puguh ,W. P., Sri, W., Indah, E. W., dan Harlina, F. 2014. Dari Radikal Ring ke Radikal Modul. *Prosiding Seminar Nasional Matematika*. Universitas Gadjah Mada. Yogyakarta.